# آزمون جامع ۴ (تست‌های کنکور آزاد تجربی ۹۱)

۱۷ دقیقه

۱ ـ در یک تصاعد هندسی $a_۲.a_۳.a_۴ = ۸$ است. حاصل $a_۱.a_۵$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

۲ ـ معادله‌ی $\sin^۸ x = \frac{۱}{۳}$ چند ریشه در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳ ـ اگر $\log ۲ = a$ باشد، حاصل $\log\frac{۱}{۵\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}-\frac{۳a}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}a$ ۳) $\frac{۳}{۲}a-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}a-\frac{۱}{۲}$

۴ ـ اگر $f(x)=|x|+|x-۱|$، حاصل $f(\sqrt{۳}-۱)+f(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۵ ـ در معادله‌ی $۲x^۲+۴x-۳=۰$ حاصل $\frac{x_۲}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۳}$ ۲) $\frac{-۲۱}{۲}$ ۳) $\frac{-۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲۱}{۲}$

۶ ـ اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$، آن‌گاه حاصل $\log\frac{۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}$ ۲) $\frac{b}{۲}-\frac{a}{۲}$ ۳) $\frac{a}{۲}-\frac{b}{۲}$ ۴) $-\frac{a+b}{۲}$

۷ ـ معادله‌ی $(۳\sin x-۴)(۴\cos x-۳)=۰$ چند ریشه در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۸

۸ ـ در یک تصاعد هندسی، قدر نسبت برابر $\frac{۱}{۲}$ است. مجموع جملات پنجم و هفتم چند برابر مجموع جملات هشتم و دهم است؟ $(\frac{a_۵+a_۷}{a_۸+a_{۱۰}})$

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹ ـ میانگین مقادیر $a+۱$ و $a+۲,...,a+۱۱$ کدام است؟

۱) $a+۶$ ۲) $۲a+۱۲$ ۳) $a+۱۲$ ۴) $۲a+۶$

۱۰ ـ اگر $f(x)=x^۲$، آن‌گاه حاصل $f(\cos ۱۳۵^\circ)+f(\sin ۱۳۵^\circ)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۱۱ ـ معادله‌ی $x^۴+x^۲-۱۲=۰$، چند ریشه حقیقی دارد؟

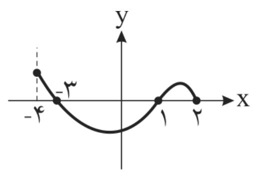
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

# آزمون جامع ۵ کنکور سراسری ریاضی ۹۲ ـ داخل کشور

۱ ـ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

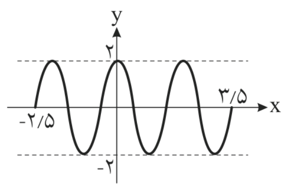
۱) $۰<a\le ۲$ ۲) $a\le ۲$ ۳) $۲<a<۳$ ۴) $۰<a<۳$

۲ ـ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟




۱) $[-3, 2]$
۲) $[0, 2]$
۳) $[-4, -3]\cup[1, 2]$
۴) $[-3, 0]\cup[1, 2]$

۳ ـ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{1}{2}+bx)$ است. $ab$ کدام است؟




۱) ۲/۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۳/۵

۴ ـ اگر $\beta$ و $\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

۱) $4x^2-3x+1=0$ ۲) $4x^2-5x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۵ ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-4)|x|<2x-5$ به کدام صورت است؟

۱) $(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$ ۲) $(1, 5)$ ۳) $(1, 5)\cup(1+\sqrt{6}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 1-\sqrt{6})\cup(1, 5)$

۶ ـ اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشند، ضابطه‌ی تابع $fog$ کدام است؟

۱) $2x^2-3x+7$ ۲) $2x^2-7x+3$ ۳) $4x^2-2x+13$ ۴) $4x^2-4x+11$

۷ ـ تابع $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنه‌ی $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f$ و $f^{-1}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۸ ـ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

۹ ـ حاصل عبارت $\tan^{-1}\sqrt{x^2+x}+\sin^{-1}(x^2+x+1)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\pi$

۱۰ ـ تمام داده‌های نمودار ساقه وبرگ زیر را سه‌برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

| ساقه | برگ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۸ | ۰ | ۱ | ۵ | | |
| ۹ | ۲ | ۴ | ۶ | ۷ | |
| ۱۰ | ۰ | ۰ | ۳ | ۴ | ۸ |

۱) ۲۵۵
۲) ۲۴۵
۳) ۲۵۰
۴) ۲۴۰

۱۱ ـ در ۱۲ داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

# آزمون جامع ۶ کنکور سراسری تجربی ۹۲ ـ داخل کشور

۱ ـ جمله‌های دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{7}{3}$

**۲ ـ اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$، دامنه‌ی تابع $f(3-x)$ کدام است؟**

۱) $[0, 2]$ ۲) $[0, 3]$ ۳) $[1, 2]$ ۴) $[1, 3]$

**۳ ـ در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده‌ها کدام است؟**

| مرکز دسته | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی تجمعی | ۸ | ۲۴ | ۴۴ | ۶۸ | ۸۰ |

۱) ۹/۲ ۲) ۹/۳ ۳) ۹/۴ ۴) ۹/۵

**۴ ـ در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟**

۱) $\frac{7}{9}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{8}{9}$

**۵ ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1$ به‌صورت کدام بازه است؟**

۱) $(-3, -\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ۲) $(-2, -\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}, 1)$ ۳) $(-3, -\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

**۶ ـ اگر $f(x)=(3-2x)^2$ و $g(x)=x+2$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟**

۱) $-1$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $1$ ۴) $\frac{3}{2}$

**۷ ـ ضابطه‌ی معکوس تابع $y=2-\sqrt{x-1}$، به کدام صورت است؟**

۱) $y=x^2-4x+5\ ;\ x\le 2$ ۲) $y=-x^2+4x-5\ ;\ x\le 2$ ۳) $y=x^2-4x+5\ ;\ x\ge 1$ ۴) $y=-x^2+4x-5\ ;\ x\ge 1$

**۸ ـ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟**

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

# پاسخ آزمون جامع

## پاسخ آزمون جامع ۱

۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** شرط اول برای این‌که این عبارت درجه دو به ازای هر مقدار x منفی باشد این است که $\Delta < ۰$ باشد. در واقع معادله‌ی درجه دو باید فاقد ریشه باشد. بنابراین داریم: $\Delta = (a-۱)^۲ - ۴(a-۱) < ۰$

$$\Rightarrow (a-۱)(a-۱-۴) < ۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵) < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۵$$

**پله‌ی دوم:** علاوه بر شرط اول ضریب $x^۲$ باید منفی باشد تا حاصل چند جمله‌ای درجه دو همواره منفی باشد. بنابراین $a < ۱$ است.
اگر بخواهیم بین مجموعه جواب حاصل از شرط اول و مجموعه حاصل از شرط دوم اشتراک بگیریم، حاصل $\phi$ است.

۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** ابتدا عبارت مثلثاتی را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$A = \frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(۳\pi+\theta)} = \frac{\sin\theta - (-\cos\theta)}{\sin\theta - (-\sin\theta)}$$
$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{۲\sin\theta}$$

**پله‌ی دوم:** فرض تست این است که $\tan\theta = ۰/۲$ است. حالا اگر صورت و مخرج کسر به‌دست آمده را بر $\cos\theta$ تقسیم کنیم، با استفاده از فرض تست می‌توانیم به جواب دست پیدا کنیم:

$$A = \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta + ۱}{۲\tan\theta} = \frac{۰/۲+۱}{۰/۴} = \frac{۱/۲}{۰/۴} = \mathbf{۳}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** حاصل $\log_۳^A$ را تعیین می‌کنیم:

$$۳^a = A \Rightarrow \log_۳^{۳^a} = \log_۳^A \Rightarrow \log_۳^A = a\log_۳^۳ = a$$

**پله‌ی دوم:** با استفاده از ویژگی $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$ از ویژگی‌های لگاریتم، حاصل عبارت داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\log_۳^{۹A^۲} = \log_۳^۹ + \log_۳^{A^۲} = \log_۳^{۳^۲} + \log_۳^{A^۲} =$$
$$۲\log_۳^۳ + ۲\log_۳^A = \mathbf{۲+۲a}$$

۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در تساوی $(۱+\sqrt{۲})^{۲n} = ۹۹ + b\sqrt{۲}$ ایجاد می‌کنیم: $(۱+\sqrt{۲})^{۲n} = ((۱+\sqrt{۲})^۲)^n = (۱+۲\sqrt{۲}+۲)^n$

$$= (۳+۲\sqrt{۲})^n = ۹۹ + b\sqrt{۲}$$

**پله‌ی دوم:** فرض می‌کنیم تساوی دومی که در تست به ما داده شده است برقرار باشد. بنابراین با نگاهی کوتاه به دو تساوی متوجه می‌شویم اگر طرف‌های چپ دو تساوی را درهم ضرب کنیم به نتایج خوبی می‌رسیم. در این‌صورت می‌توانیم مقدار b را هم حساب کنیم. با ما همراه باشید:

$$(۳+۲\sqrt{۲})^n \times (۳-۲\sqrt{۲})^n = [(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})]^n$$
$$= (۹-۸)^n = ۱$$

پس حاصل‌ضرب دو طرف راست تساوی‌ها باید برابر ۱ شود:

$$(۹۹+b\sqrt{۲})(۹۹-b\sqrt{۲}) = ۹۹^۲ - ۲b^۲ = ۱$$
$$\Rightarrow ۲b^۲ = ۹۹^۲ - ۱ \Rightarrow ۲b^۲ = ۹۹^۲ - ۱^۲$$
$$\Rightarrow ۲b^۲ = (۹۹-۱)(۹۹+۱) \Rightarrow ۲b^۲ = ۹۸ \times ۱۰۰$$
$$\Rightarrow b^۲ = ۴۹ \times ۱۰۰ \Rightarrow b = ۷ \times ۱۰ = \mathbf{۷۰}$$

۵ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی $f(g(x))$ برای ما مشخص است. تست $f(۳)$ را از ما می‌خواهد. پس اگر $g(x)$ را برابر ۳ قرار دهیم، مقدار xای که در ضابطه‌ی $f(g(x))$ قرار می‌گیرد را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x) = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

**پله‌ی دوم:** حالا در ضابطه‌ی $f(g(x))$ به‌جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f(۳) = \frac{۲}{۲-۳} = \frac{۲}{-۱} = \mathbf{-۲}$$

۶ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** با استفاده از اتحاد مزدوج و با بهره‌گیری از قوانین تبدیل جمع به ضرب، کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin^۲ ۷x - \sin^۲ ۲x}{\sin ۵x} = \frac{(\sin ۷x - \sin ۲x)(\sin ۷x + \sin ۲x)}{\sin ۵x}$$
$$= \frac{(۲\sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{۹x}{۲})(۲\sin\frac{۹x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲})}{\sin ۵x}$$
$$= \frac{(۲\sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲})(۲\sin\frac{۹x}{۲}\cos\frac{۹x}{۲})}{\sin ۵x}$$

**پله‌ی دوم:** عبارت‌های داخل پرانتز در صورت کسر داد می‌زند که ما را با استفاده از فرمول $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ساده کنید. پس داریم:

$$A=\frac{\sin 9x \sin 5x}{\sin 5x}=\sin 9x \xrightarrow{x=\frac{x}{54}} A=\sin 9(\frac{\pi}{54})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

۷ ـ (۲) **روش اول:** فرض می‌کنیم $\sin^{-1}x=\alpha$ باشد. بنابراین داریم:

$$\sin^{-1}x=\alpha \Rightarrow y=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$$

معادله‌ی $y=\sqrt{1-x^2}$ معادله‌ی یک نیم دایره است. پس گزینه‌ی ۲ درست است.

**روش دوم:** دامنه تعریف تابع به‌صورت $[-1,1]$ است. مقدار تابع را به ازای $x=-1$ و $x=0$ و $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=-1 \Rightarrow \sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\cos(-\frac{\pi}{2})=0$$

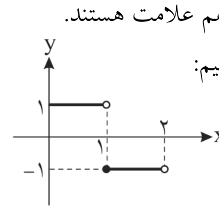
$$x=0 \Rightarrow \sin^{-1}(0)=0 \Rightarrow y=\cos 0=1$$

$$x=1 \Rightarrow \sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

به ازای بقیه‌ی مقادیر موجود در دامنه تعریف مقدار y همواره مثبت است. بنابراین فقط گزینه‌ی ۲ درست است.

۸ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** طرف راست تساوی همواره نامنفی است. بنابراین طرف چپ تساوی هم باید نامنفی باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت در هر بازه‌ی دل‌خواه دو تابع $y=(-1)^{[x]}$ و $y=f(x)$ هم علامت هستند.

**پله‌ی دوم:** نمودار تابع $y=(-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:




با توجه به نمودار تابع، تنها تابعی که می‌تواند به جای $f(x)$ قرار گرفته و در بازه‌ی $(0,2)$ نمودار مشابه نمودار تابع $y=(-1)^{[x]}$ داشته باشد (از نظر علامت) تابع $\mathbf{y=\sin\pi x}$ است. (نمودار را رسم کنید تا متوجه موضوع بشوید.)

۹ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** جدول فراوانی مطلق داده‌ها را تشکیل می‌دهیم:

| نماینده دسته | ۳۳ | ۳۷ | ۴۱ | ۴۵ | ۴۹ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی مطلق | ۷ | ۱۰ | ۱۵ | ۱۲ | a−۴۴ |

**پله‌ی دوم:** با توجه به این‌که میانگین برابر ۴۱ است، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{(7\times 33)+(10\times 37)+(15\times 41)+(12\times 45)+(a-44)\times 49}{a}=41$$

$$\Rightarrow 41a=231+370+615+540+49a-2156$$

$$\Rightarrow 8a=400 \Rightarrow a=50$$

**پله‌ی سوم:** زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم را در نمودار دایره‌ای تعیین می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{F}{n}\times 360^\circ=\frac{15}{50}\times 360^\circ=\mathbf{108^\circ}$$

۱۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با استفاده از مقدار میانگین و ضریب تغییرات، حاصل انحراف معیار را به‌دست می‌آوریم:

$$CV=\frac{\sigma}{x} \Rightarrow 0/2=\frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma=15\times 0/2=3$$

**پله‌ی دوم:** بنابراین مقدار واریانس یا همان $\sigma^2$ برابر ۹ است. پس حاصل $\frac{\sum x^2 i}{n}$ برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{\sum x^2 i}{n}-(\bar{x})^2 \Rightarrow 9=\frac{\sum x^2 i}{n}-15^2$$

$$\frac{\sum x^2 i}{n}=9+225=\mathbf{234}$$

# پاسخ آزمون جامع ۲

۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** در بین زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده‌ی تابع g اگر ورودی ۶ باشد، خروجی ۵ را به ما می‌دهد. بنابراین $f(a)=6$ است.

**پله‌ی دوم:** حالا $f(a)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$f(a)=6 \Rightarrow a+\sqrt{a}=6 \xrightarrow{\sqrt{a}=q} q^2+q=6$$

$$\Rightarrow q^2+q-6=0 \Rightarrow (q-2)(q+3)=0 \xrightarrow{q>0} q=2 \Rightarrow \mathbf{a=4}$$

۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** اگر $x=0$ باشد از شر متغیر b خلاص شده و به راحتی می‌توانیم مقدار a را حساب کنیم. پس گام اول محاسبه‌ی مقدار a با استفاده از رابطه‌ی $f(0)=\frac{3}{2}$ است. داریم:

$$f(0)=\frac{3}{2} \Rightarrow ab^{\circ}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

**پله‌ی دوم:** حالا با استفاده از تساوی $f(-2)=\frac{3}{32}$ مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-2)=\frac{3}{32} \Rightarrow ab^{-2}=\frac{3}{32} \xrightarrow{a=\frac{3}{2}} \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2}=\frac{1}{16} \Rightarrow b^2=16 \xrightarrow{b>0} b=4$$

**پله‌ی سوم:** با داشتن مقدار a و b دیگری محاسبه‌ی $f(\frac{3}{2})$ کار چندان سختی نیست:

$$f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x \Rightarrow f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 2^3=\frac{3}{2}\times 8=\mathbf{12}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** برای این‌که تابع با ضابطه‌ی $y=-4\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$ بیش‌ترین مقدار خود را داشته باشد باید مقدار $\cos(\frac{\pi}{4}-2\pi x)$ برابر ۱− باشد. چون اگر این عبارت مثلثاتی کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد حاصل‌ضرب آن در یک عدد منفی بیش‌ترین مقدار تابع را به ما می‌دهد.

**پله‌ی دوم:** معادله‌ی $\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1$ را حل می‌کنیم. ابتدا جواب کلی را به‌دست می‌آوریم و سپس با توجه به این‌که $x\in[-1,1]$ است، تعداد

جواب‌های x را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = -\frac{2k}{3} - \frac{1}{4}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = -\frac{19}{12} \quad \times \qquad k = 1 \Rightarrow x = -\frac{11}{12} \quad \checkmark$$

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \quad \checkmark \qquad k = -1 \Rightarrow x = \frac{15}{12} \quad \checkmark$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{13}{12} \quad \times$$

پس این معادله در بازه‌ی $[-1, 1]$، **۳** جواب دارد.

۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم و آخر:** در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی هر ۳ روش مصاحبه، مشاهده و انجام آزمایش روش‌های قابل قبولی برای جمع‌آوری داده‌ها هستند. اما جمع‌آوری داده به روش **پرسش هدایت‌کننده** اطلاعات درستی را به ما نمی‌دهد.

۵ ـ (۲) **چشم‌انداز:** روش سریع در محاسبه‌ی میانگین داده‌ها یعنی این که ابتدا یک میانگین حدسی مناسب را با توجه به داده‌های موجود انتخاب کنیم. بعد از آن تمام داده‌ها را از آن کم می‌کنیم.

**پله‌ی یکم و آخر:** فرض می‌کنیم ۱۲۲ که داده‌ی وسط است را به‌عنوان میانگین حدسی انتخاب کنیم. بنابراین جدول داده‌ها به‌صورت زیر تغییر پیدا می‌کند:

| $x-122$ | $-12$ | $-6$ | $0$ | $6$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | ۵ | ۸ | ۱۵ | ۱۲ | ۱۰ |

حالا می‌توانیم مقدار میانگین را حساب کنیم:

$$\bar{x} - 122 = \frac{5(-12) + 8(-6) + 15(0) + 12(6) + 10(12)}{50} = \frac{84}{50} = 1/68$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 1/68 + 122 = \mathbf{123/68}$$

۶ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

**پله‌ی دوم:** برای این‌که منحنی تابع gof بالای محور xها باشد، باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$g(f(x)) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{نامعادله را در (۲-)}}$$

$$x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0 \Rightarrow \mathbf{-4 < x < 1}$$

۷ ـ (۱) **روش اول:** در این روش به‌صورت تستی و کنکوری به تست پاسخ می‌دهیم. اگر نقطه‌ی $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند، نقطه‌ی $B(\alpha, \beta)$ در ضابطه‌ی وارون تابع صدق می‌کند. نقطه‌ی $A(4, \frac{4}{5})$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند. تنها ضابطه‌ای که نقطه‌ی $B(\frac{4}{5}, 4)$ در آن صدق می‌کند ضابطه‌ی $\mathbf{y = \frac{x}{1-|x|}}$ است که همواره $\mathbf{|x| < 1}$ می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی ۱ جواب درست است.

**روش دوم:** در دو حالت $x \ge 0$ و $x \le 0$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$x \ge 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \; ; \; 0 \le y < 1$$

$$x \le 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

و $-1 < y \le 0$

حالا اگر این دو ضابطه را در یک ضابطه نمایش دهیم به‌صورت زیر می‌شود:

$$x = \frac{y}{1-|y|} \; ; \; |y| < 1 \Rightarrow \mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \; ; \; |x| < 1}$$

۸ ـ (۳) **روش اول: پله‌ی یکم:** محدوده‌ی $\sqrt{4n^2 - 3n + 1}$ را برحسب مقادیر n تعیین می‌کنیم:

$$n > 2 \Rightarrow 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2$$

$$\Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$\Rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n - 1$$

**پله‌ی دوم:** به همین ترتیب حاصل $[\sqrt{n^2 - 2n}]$ را به‌دست می‌آوریم:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1$$

$$\Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

$$\Rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n - 2$$

**پله‌ی سوم:** حاصل عبارت داده شده را حساب می‌کنیم:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n - 1 - 2(n-2)$$

$$= 2n - 1 - 2n + 4 = \mathbf{3}$$

**روش دوم:** کافی بود n را برابر ۳ قرار داده و حاصل عبارت را به‌دست آوریم. قرار نیست در کنکور به روش علمی تست راحل کنیم. مهم رسیدن به جواب درست است.

۹ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** عبارت مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$$

$$\Rightarrow -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos x$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

**پله‌ی دوم:** جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی جدید را تعیین می‌کنیم:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

اجتماع این دو جواب برابر $\mathbf{x = \frac{2k\pi}{3}}$ است.

# پاسخ آزمون جامع ۳

۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $a_7+a_{13}=18$ است، رابطه‌ای برحسب $a_1$ (جمله‌ی اول) و $d$ (قدر نسبت) تشکیل می‌دهیم:

$$a_7+a_{13}=18\Rightarrow(a_1+6d)+(a_1+12d)=18\Rightarrow$$
$$2a_1+18d=18 \quad \mathrm{I}$$

**پله‌ی دوم:** می‌خواهیم مقدار $S_{19}$ را به‌دست آوریم. گوشه چشمی هم به رابطه‌ی $\mathrm{I}$ داریم:

$$S_{19}=\frac{19}{2}(2a_1+18d)\xrightarrow{\mathrm{I}}S_{19}=\frac{19}{2}\times18=19\times9=\mathbf{171}$$

۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم و آخر:** پرانتز اول را به توان ۲ رسانده و با ساده کردن عبارت حاصل را تعیین می‌کنیم:

$$(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2-x^{-1}(x^2+1)=(x+2+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}(x^2+1)=$$
$$x+2+\frac{1}{x}-x-\frac{1}{x}=\mathbf{2}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ابتدا معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$[\frac{2x-1}{x}]=3\Rightarrow[\frac{2x}{2}-\frac{1}{x}]=3\Rightarrow[2-\frac{1}{x}]=3$$
$$\Rightarrow2+[-\frac{1}{x}]=3\Rightarrow[-\frac{1}{x}]=1$$

**پله‌ی دوم:** جواب معادله‌ی جدید به سادگی به‌دست می‌آید:

$$[-\frac{1}{x}]=1\Rightarrow1\le-\frac{1}{x}<2\Rightarrow-2<\frac{1}{x}\le-1\Rightarrow\mathbf{-1\le x\le-\frac{1}{2}}$$

۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ساده می‌کنیم:

$$A=\log\frac{8100}{\sqrt[4]{49}}=\log8100-\log\sqrt[4]{49}=\log(81\times100)-\log\sqrt[4]{7^2}$$
$$=\log81+\log100-\log7^{\frac{2}{4}}=\log3^4+\log10^2-\frac{1}{2}\log7$$
$$=4\log3+2-\frac{1}{2}\log7$$

**پله‌ی دوم:** در تست مقدار $\log7$ برابر ۰/۸ و مقدار $\log3$ برابر ۰/۴ است. پس حاصل عبارت لگاریتمی برابر است با:

$$A=(4\times0/4)+2-(\frac{1}{2}\times0/8)=1/6+2-0/4=\mathbf{3/2}$$

۵ ـ (۳) **روش اول:** برای به‌دست آوردن مقدار $\tan x$، با استفاده از رابطه‌ی $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ معادله را حل کرده و سپس مقدار $\tan x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$$
$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$\tan x=\tan(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=\mathbf{1}$$

**روش دوم (روش تستی):** نگاهی به رابطه‌ی $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ می‌اندازیم. اگر $\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، این تساوی برقرار است. پس $x=\frac{\pi}{4}$ یکی از جواب‌های این معادله است. حاصل $\tan x$ برابر $\tan\frac{\pi}{4}=\mathbf{1}$ می‌شود.

۶ ـ (۲)

**۱)** دامنه تعریف تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. بنابراین خیالمان راحت است که دامنه تعریف متقارن است. ضابطه‌ی $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x)$$

پس تابع $f(x)$ فرد است نه زوج.

**۲)** اگر مقدار $x$ افزایش پیدا کند یا مقدار $\sin x$ افزایش پیدا می‌کند یا کاهش. اگر افزایش پیدا کند که چه بهتر اما اگر کاهش پیدا کند هم مقدار $x+\sin x$ از حالت اول بیش‌تر می‌شود، پس **تابع صعودی** است. (نیازی نبود این‌قدر خودمان را اذیت کنیم. از مشتق استفاده می‌کردیم:

$$f(x)=x+\sin x\Rightarrow f'(x)=1+\cos x\ge0$$

بنابراین تابع $f(x)$ همواره صعودی است.)

با درست بودن گزینه‌ی ۲ نادرست بودن دیگر گزینه‌ها قطعی است.

۷ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. به این صورت که $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ را برابر $\alpha$ و $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ را بربر $\beta$ درنظر می‌گیریم. هدف ما یافتن $\alpha+\beta$ است.

**پله‌ی دوم:** برای به‌دست آوردن $\alpha+\beta$ ابتدا $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$$
$$=\frac{\tan(\tan^{-1}\frac{1}{2})+\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3})}{1-\tan(\tan^{-1}\frac{1}{2})\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3})}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1\Rightarrow\alpha+\beta=\mathbf{\frac{\pi}{4}}$$

۸ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** در صورتی انحراف معیار تعدادی از داده‌ها با هم برابر است که تمامی آن داده‌ها با هم برابر باشند. بنابراین داریم:

$$x_1=x_2=x_3=20$$

پله‌ی دوم: میانگین ۴ داده که همگی برابر ۲۰ هستند، **۲۰** است.

۹ ـ (۱) **پله‌ی یکم و آخر:** اگر $k$ واحد به یک‌سری از داده‌های آماری اضافه یا کم شود مشخص است که میانگین، میانه و ضریب تغییرات تغییر می‌کنند. اما در بین همه‌ی این‌ها، **واریانس** ثابت باقی می‌ماند.

۱۰ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** عبارت مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 2x - \cos^4 2x = (\sin^2 2x - \cos^2 2x)(\underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_{1})$$

$$= \sin^2 2x - \cos^2 2x = -(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$= -\cos 2(2x) = -\cos 4x$$

**پله‌ی دوم:** حالا معادله را حل کرده و تعداد جواب‌های آن در بازه‌ی $[\pi, 2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

$$-\cos 4x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 4x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \mathrm{co}^{-1}(-\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\cos^{-1}(-\frac{1}{3})}{4}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارای **۸** جواب است.

۱۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** تست فریاد می‌زند که با استفاده از تغییر متغیر آن را حل کنیم. بنابراین $x^4 - x^2$ را برابر $\alpha$ فرض کرده و معادله‌ی درجه ۲ جدید را حل می‌کنیم:

$$\alpha^2 - 7\alpha - 8 = 0 \Rightarrow (\alpha - 8)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

**پله‌ی دوم:** ریشه‌های معادله‌ی اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = 8 \Rightarrow x^4 - x^2 = 8 \Rightarrow x^4 - x^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 - x^2 - 8 = 0$$

از حل این معادله $x^2$ دارای یک مقدار مثبت و یک مقدار منفی می‌شود. به ازای مقدار مثبت دو مقدار برای $x$ به‌دست می‌آید.

$\alpha = -1 \Rightarrow x^4 - x^2 = -1 \Rightarrow x^4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ این معادله ریشه ندارد.

بنابراین معادله‌ی اصلی دارای **۲** ریشه‌ی حقیقی است.

۱۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نامنفی است، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{x}{3} + 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{3} \geq -2 \Rightarrow x \geq -6 \quad \mathrm{I}$$

**پله‌ی دوم:** عبارت زیر رادیکال اصلی هم نباید منفی باشد:

$$-\frac{x}{3} - 2 + \sqrt{\frac{x}{3} + 2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{3} + 2} \geq \frac{x}{3} + 2 \xRightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{دو طرف نامنفی}}$$

$$\frac{x}{3} + 2 \geq (\frac{x}{3} + 2)^2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 2 \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3} \leq -1 \Rightarrow x \leq -3 \quad \mathrm{II}$$

اشتراک بین دو مجموعه جواب I و II برابر $-6 \leq x \leq -3$ می‌شود. این بازه شامل **۴** عدد صحیح ۶−، ۵−، ۴− و ۳− است.

۱۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** یک بار $x$ را برابر ۲ و یک بار برابر $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم.

$$x = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) - 2f(2) = 2^2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

**پله‌ی دوم:** با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $f(2)$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) - 2f(2) = \frac{9}{2} \\ f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \end{cases} \xRightarrow{\text{معادله‌ی بالا} \times 2}$$

$$\begin{cases} 2f(\frac{1}{2}) - 4f(2) = 9 \\ f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \end{cases} \xRightarrow{\oplus} -3f(2) = \frac{45}{4} \Rightarrow f(2) = -\frac{15}{4}$$

۱۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** نقطه‌ی $(0, \alpha)$ متعلق به ضابطه‌ی معکوس تابع است. بنابراین نقطه‌ی $(\alpha, 0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند.

**پله‌ی دوم:** عبارت صورت کسر تابع اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقدار $\alpha$ یا همان عرض نقطه‌ای برخورد معکوس تابع با محور $y$ها را پیدا کنیم:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = -3$$

$$\Rightarrow x + 1 = -\sqrt[3]{3} \Rightarrow x = -1 - \sqrt[3]{3} \Rightarrow \alpha = \mathbf{-1 - \sqrt[3]{3}}$$

۱۵ ـ ؟ **پله‌ی یکم:** سعی می‌کنیم حاصل $\cos 4x$ را برحسب $\cos^2 x$ تعیین کنیم:

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)^2 - (2\sin x \cos x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2 - 4\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)^2 - 4(1 - \cos^2 x)\cos^2 x$$

**پله‌ی دوم:** مقدار $\cos^2 x$ برابر $\frac{1}{4}$ است. حاصل $\cos 4x$ برابر است با:

$$\cos 4x = ((2 \times \frac{1}{4}) - 1)^2 - 4(1 - \frac{1}{4})(\frac{1}{4})$$

$$= (-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

جواب در بین گزینه‌ها موجود نیست.

۱۶ ـ (۳) پله‌ی یکم: حاصل $\log x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\log x\sqrt[3]{x} = \log x \times x^{\frac{1}{3}} = \log x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}\log x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

**پله‌ی دوم:** محاسبه‌ی $\log\sqrt{x\sqrt{x}}$ کار چندان سختی نیست:

$$\log\sqrt{x\sqrt{x}} = \log\sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \log\sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = \log x^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}\log x = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \mathbf{\frac{9}{32}}$$

۱۷ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** از رابطه‌ی $S_8 - S_5 = 7$ می‌توانیم مقدار $a_7$ را حساب کنیم. چه‌طوری؟ ببینید:

$$S_8 - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 = a_7 + (a_6 + a_8)$$

$$= a_7 + 2a_7 = 7 \Rightarrow 3a_7 = 7 \Rightarrow a_7 = \frac{7}{3}$$

**پله‌ی دوم:** با استفاده از مقدار $a_7$، حاصل مجموع جمله‌های داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$a_4+a_5+\cdots+a_{10}=(a_4+a_{10})+(a_5+a_9)+(a_6+a_8)+a_7$$
$$=2a_7+2a_7+2a_7+a_7=7a_7=7\times\frac{7}{3}=\mathbf{\frac{49}{3}}$$

۱۸ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** فرض می‌کنیم جمله‌ی $k+1$اُم بسط مستقل از $x$ باشد. ابتدا این جمله را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{جمله‌ی } k+1\text{اُم}=\binom{9}{k}\times x^{\frac{9}{2}-\frac{k}{2}}\times x^{-k}=\binom{9}{k}x^{\frac{9}{2}-\frac{3k}{2}}$$

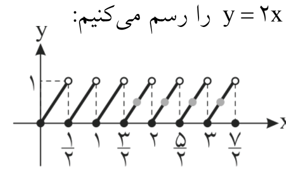
**پله‌ی دوم:** در صورتی جمله‌ای مستقل از $x$ است که توان $x$ برابر صفر باشد. داریم:

$$\frac{9}{2}-\frac{3k}{2}=0\Rightarrow\frac{3k}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow 3k=9\Rightarrow k=3$$

بنابراین مقدار جمله‌ی مستقل از $x$ برابر است با:

$$\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\mathbf{84}$$

۱۹ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** نمودار تابع $y=2x-[2x]$ را رسم می‌کنیم:




**پله‌ی دوم:** اگر $\sqrt{2}\le x\le\sqrt{10}$ باشد در این صورت خط $y=\frac{1}{2}$ در ۴ نقطه نمودار تابع را قطع می‌کند.

۲۰ ـ ۴ **پله‌ی یکم و آخر:** برای رسیدن به داده‌های جدید، داده‌های قبلی ۲ برابر شده و با عدد ۸ جمع شده‌اند. اضافه یا کم شدن مقدار ثابتی به تمام داده‌ها تأثیری در مقدار واریانس ندارد. اما وقتی داده‌ها ۲ برابر شوند واریانس داده‌های جدید ۴ برابر می‌شود. پس واریانس این داده‌ها برابر **$4s$** می‌شود.

# پاسخ آزمون جامع ۴

۱ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** فرض تست را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$a_2.a_3.a_4=8\Rightarrow(a_1q)(a_1q^2)(a_1q^3)=8\Rightarrow$$
$$a_1^3q^6=8\Rightarrow(a_1q^2)^3=2^3\Rightarrow a_1q^2=2$$

**پله‌ی دوم:** با معلوم بودن مقدار $a_1q^2$ حاصل $a_1.a_5$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_1a_5=a_1(a_1q^4)=a_1^2q^4=(a_1q^2)^2=2^2=\mathbf{4}$$

۲ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** مقدار $\sin x$ را از معادله‌ی داده‌شده تعیین می‌کنیم:

$$\sin^8 x=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}}\sin^4 x=+\frac{1}{\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}}\sin^2 x=+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}}\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$$

(توجه دارید که در مرحله‌ی اول و دوم وقتی ریشه‌ی دوم گرفتیم فقط مقدار مثبت قابل قبول است و مقدار منفی قابل قبول نبوده و حذف می‌شود.)

**پله‌ی دوم:** در بازه‌ی $[0,2\pi]$ معادله‌ی $\sin x=\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$ دارای ۲ جواب (در نواحی اول و دوم) و معادله‌ی $\sin x=-\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$ نیز دارای ۲ جواب (در نواحی سوم و چهارم) است، پس معادله‌ی اصلی در بازه‌ی $[0,2\pi]$ در مجموع دارای ۴ جواب است.

۳ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** با توجه به این که $\log 2=a$ است، حاصل $\log 5$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-a$$

**پله‌ی دوم:** حاصل $\log\frac{1}{5\sqrt{5}}$ را بر حسب $a$ تعیین می‌کنیم:

$$\log\frac{1}{5\sqrt{5}}=\log 5^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}\log 5=-\frac{3}{2}(1-a)=\mathbf{\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}}$$

۴ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ و $f(\sqrt{3}-1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\sqrt{2}-1)=|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-1-1|=|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-2|=$$
$$=\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}-2)=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1$$
$$f(\sqrt{3}-1)=|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-1-1|=|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-2|$$
$$=\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}-2)=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1$$

**پله‌ی دوم:** فکر نکنم محاسبه‌ی حاصل‌جمع کار چندان دشواری باشد:

$$f(\sqrt{3}-1)+f(\sqrt{2}-1)=1+1=\mathbf{2}$$

۵ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** عبارتی که بر حسب $x_1$ و $x_2$ است را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$$

**پله‌ی دوم:** در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+4x-3=0$، حاصل $x_1+x_2=-2$ و حاصل $x_1x_2=\frac{-3}{2}$ است، بنابراین مقدار عبارت داده شده برابر است با:

$$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(-2)^2-2(-\frac{3}{2})}{-\frac{3}{2}}=\frac{4+3}{-\frac{3}{2}}=\frac{7}{\frac{-3}{2}}=\mathbf{-\frac{14}{3}}$$

۶ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$A=\log\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\log\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$=\log(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(\log 2-\log 3)$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این‌که $\log 2=a$ و $\log 3=b$ است، مقدار $A$ را حساب می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{2}(a-b)=\mathbf{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}$$

۷ ـ (۱) **پله‌ی یکم و آخر:** هر یک از پرانتزها را برابر صفر قرار داده و تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$3\sin x - 4 = 0 \Rightarrow 3\sin x = 4 \Rightarrow \sin x = \frac{4}{3}$ غیرقابل قبول

$4\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 4\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4}$

در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ معادله‌ی $\cos x = \frac{3}{4}$ دارای **۲** جواب است؛ یک جواب در ناحیه‌ی اول مثلثاتی قرار دارد و یک جواب در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی.

۸ ـ (۲) **پله‌ی یکم و آخر:** با توجه به این که در تصاعد هندسی جمله‌ی عمومی به‌صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است، عبارت $\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_{10}}$ را ساده می‌کنیم تا ببینیم به کجا می‌رسیم:

$$\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_{10}} = \frac{a_1 q^4 + a_1 q^6}{a_1 q^7 + a_1 q^9} = \frac{a_1 q^4 (1+q^2)}{a_1 q^7 (1+q^2)} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

۹ ـ (۱) **پله‌ی یکم و آخر:** مجموع تمام داده‌ها را به‌دست آورده و بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(a+1)+(a+2)+\dots+(a+11)}{11} =$$

$$\frac{(a+a+\dots+a)+(1+2+\dots+11)}{11} = \frac{11a + \frac{11\times 12}{2}}{11} = \frac{11a}{11} + \frac{\frac{11\times 2}{2}}{11}$$

$$= \mathbf{a+6}$$

۱۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم و آخر:** می‌دانیم رابطه‌ی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ همواره برقرار است؛ بنابراین داریم:

$$f(\cos 135^\circ) + f(\sin 135^\circ) = \cos^2 135^\circ + \sin^2 135^\circ = \mathbf{1}$$

۱۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با استفاده از تغییر متغیر، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تشکیل می‌دهیم:

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 + t - 12 = 0$$

**پله‌ی دوم:** معادله‌ی درجه‌ی دو را حل کرده و تعداد ریشه‌های حقیقی آن را به‌دست می‌آوریم: $t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -4 \Rightarrow x^2 = -4 \quad \text{غ ق ق} \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله، دارای **۲** ریشه‌ی حقیقی است.

## پاسخ آزمون جامع ۵

۱ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** شرط اول برای این که نمودار سهمی از ناحیه‌ی اول نگذرد، این است که ضریب $x^2$ منفی باشد: (I) $a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$

**پله‌ی دوم:** در دو حالت ممکن است نمودار از ناحیه‌ی اول عبور نکند:

**حالت اول:** نمودار در نواحی سوم و چهارم قرار بگیرد:

$$\Delta \le 0 \Rightarrow a^2 + 4(a-3) \le 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \le 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2) \le 0 \Rightarrow -6 \le a \le 2$$

**حالت دوم:** نمودار سهمی فقط از ناحیه‌ی اول عبور نکند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a-3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6$$

$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a-3} < 0 \xrightarrow{a-3<0} -a > 0 \Rightarrow a < 0$ : مجموع ریشه‌ها منفی است.

$P > 0 \Rightarrow -\frac{1}{a-3} > 0$ همواره برقرار است : حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت

بنابراین مجموعه جواب در این حالت به‌صورت $a < -6$ درمی‌آید.

اجتماع جواب‌ها در پله‌ی دوم به‌صورت $(-\infty, 2]$ شده که حاصل اشتراک آن با مجموعه جواب (I) به‌صورت $\mathbf{a \le 2}$ درمی‌آید.

۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج همواره نامنفی است. بنابراین $xf(x) \ge 0$ است.

**پله‌ی دوم:** در صورتی که $xf(x) \ge 0$ است که $x$ و $f(x)$ هر دو هم‌علامت باشند، بنابراین دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌صورت $\mathbf{[-3, 0] \cup [1, 2]}$ در می‌آید.

۳ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a\sin\frac{\pi}{2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

**پله‌ی دوم:** دوره‌ی تناوب تابع را تعیین می‌کنیم: $\frac{7}{4}T = \frac{7}{2} \Rightarrow T = 2$

**پله‌ی سوم:** با توجه به این که تابع به‌صورت $y = 2\sin(\frac{\pi}{2} + bx)$ یا $y = 2\cos\pi bx$ درآمده است و دوره‌ی تناوب تابع برابر ۲ است، مقدار b و در نهایت حاصل ab را تعیین می‌کنیم:

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} \Rightarrow 2 = \frac{2\pi}{|\pi b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow \to b \pm 1 \xrightarrow{a=2} ab \pm 2$$

با توجه به گزینه‌ها، $ab = \mathbf{2}$ جواب تست است.

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** ریشه‌های معادله‌ی جدید را به‌صورت $X = \frac{1}{x} + 1$ در نظر می‌گیریم.

**پله‌ی دوم:** x را برحسب X به‌دست آورده و معادله‌ی جدید را تعیین می‌کنیم: $\frac{1}{x} = X - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{X-1}$

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow 2(\frac{1}{X-1})^2 - 3(\frac{1}{X-1}) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{3}{(X-1)} - 4 = 0 \xrightarrow{\times (X-1)^2} 2 - 3(X-1) - 4(X-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(X-1)^2 + 3(X-1) - 2 = 0 \Rightarrow 4(X^2 - 2X + 1) + 3X - 3 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{4X^2 - 5X - 1 = 0}$$

۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** فرض می‌کنیم $x \ge 0$ باشد. داریم:

$$(x-4)x<2x-5 \Rightarrow x^2-4x<2x-5 \Rightarrow x^2-6x+5<0$$
$$(x-1)(x-5)<0 \Rightarrow 1<x<5 \quad \mathrm{I}$$

**پله‌ی دوم:** مجموعه جواب نامعادله را در حالتی که $x<0$ است، تعیین می‌کنیم:

$$-(x-4)x<2x-5 \Rightarrow -x^2+4x<2x-5$$
$$\Rightarrow x^2-2x-5>0 \xRightarrow{x<0} x<1-\sqrt{6} \quad \mathrm{II}$$

اجتماع دو مجموعه جواب I و II به‌صورت $\mathbf{(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)}$ در می‌آید.

۶ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** ابتدا ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$g(2x+3)=8x^2+22+20$$

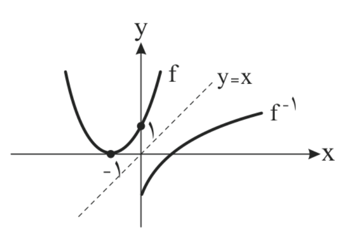
برای تعیین ضابطه‌ی $g(x)$ از تغییر متغیر به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$2x+3=t \Rightarrow 2x=t-3 \Rightarrow x=\frac{t-3}{2}$$
$$g(t)=8(\frac{t-3}{2})^2+22(\frac{t-3}{2})+20=2(t^2-6t+9)+11(t-3)+20$$
$$=2t^2-12+18+11t-33+20 \Rightarrow g(t)=2t^2-t+5$$
$$\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$

**پله‌ی دوم:** با داشتن ضابطه‌ی $f(x)$ و $g(x)$ تعیین ضابطه‌ی fog کار چندان دشواری نیست:

$$fog(x)=f(g(x))=2g(x)+3=2(2x^2-x+5)+3=\mathbf{4x^2-2x+13}$$

۷ ـ (۴) نمودار دو تابع f و $f^{-1}$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:




مشخص است که دو تابع f و $f^{-1}$ **غیرمتقاطع** هستند.

۸ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \\ 2\sin x\cos x=\sin 2x\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow \sin 2x=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

**پله‌ی دوم:** جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی به‌صورت زیر است:

$$2x=2k\pi+(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \quad \mathrm{I}$$
$$2x=2k\pi+(\pi-x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \quad \mathrm{II}$$

اجتماع دو مجموعه جواب I و II به‌صورت $\mathbf{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}$ درمی‌آید.

۹ ـ (۱) **روش اول:** $x^2+x$ زیر رادیکال است. بنابراین داریم:

$$x^2+x \ge 0$$

برای این که عبارت $\sin^{-1}(x^2+x+1)$ تعریف شده باشد، $x^2+x$ فقط باید صفر باشد، پس داریم: $x^2+x=0 \Rightarrow \tan^{-1}(0)+\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$

**روش دوم:** کافی است در عبارت داده شده به‌جای x صفر قرار داده و حاصل را محاسبه کنیم.

۱۰ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** ابتدا میانگین داده‌های موجود را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{[(3\times80)+0+1+5]+[[(4\times90)+2+4+6+7]+[(5\times100)]+0+0+3+4+8]}{12}$$
$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{(240+6)+(360+19)+(500+15)}{12}=\frac{1140}{12}=95$$

**پله‌ی دوم:** میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{X}=3\bar{x}-40=(3\times95)-40=285-40=\mathbf{245}$$

۱۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{12}\times72=6$$
$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2=\frac{1}{12}\times480-6^2=40-36=4 \Rightarrow \sigma=2$$

**پله‌ی دوم:** ضریب تغییرات برابر است با: $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

## پاسخ آزمون جامع ۶

۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** $a_2$، $a_5$ و $a_{12}$ سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی هستند. با استفاده از رابطه‌ی مربوط به واسطه‌ی هندسی، $a_1$ را برحسب d تعیین می‌کنیم:

$$a_5^2=a_2.a_{12} \Rightarrow (a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+11d)$$
$$\Rightarrow a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+12a_1d+11d^2$$
$$\Rightarrow 4a_1d=5d^2 \Rightarrow a_1=\frac{5}{4}d$$

**پله‌ی دوم:** با توجه به این که سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی به‌صورت $\frac{9d}{4}$، $\frac{21d}{4}$ و $\frac{49d}{4}$ به‌دست آمد، قدر نسبت تصاعد هندسی برابر می‌شود با:

$$q=\frac{\frac{21d}{4}}{\frac{9d}{4}}=\mathbf{\frac{7}{3}}$$

۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی $f(3-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}=\sqrt{6-2x-9+6x-x^2}$$
$$=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

**پله‌ی دوم:** دامنه‌ی تعریف تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$-x^2+4x-3 \ge 0 \Rightarrow x^2-4x+3 \le 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x-1) \le 0 \Rightarrow \mathbf{x \in [1, 3]}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** جدول مرکز دسته برحسب فراوانی مطلق داده‌ها تشکیل می‌دهیم:

| مرکز دسته | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی مطلق | ۸ | ۱۶ | ۲۰ | ۲۴ | ۱۲ |

**پله‌ی دوم:** میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{(۸\times۷)+(۱۶\times۸)+(۲۰\times۹)+(۲۴\times۱۰)+(۱۲\times۱۱)}{۸۰}$$
$$=\frac{۵۶+۱۲۸+۱۸۰+۲۴۰+۱۳۲}{۸۰}=\frac{۷۳۶}{۸۰}=\mathbf{۹/۲}$$

۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** ضریب تغییرات اولیه را به‌صورت $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$ در نظر می‌گیریم. میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید را تعیین می‌کنیم:

$$\bar{X}=۲\bar{x}+۳=۲۷ \qquad \sigma_{\text{جدید}}=۲\sigma$$

**پله‌ی دوم:** نسبت CV جدید به CV قدیم را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}}=\frac{\frac{۲\sigma}{۲۷}}{\frac{\sigma}{۱۲}}=\frac{۲۴}{۲۷}=\frac{\mathbf{۸}}{\mathbf{۹}}$$

۵ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ابتدا تغییراتی در فرم نامعادله ایجاد می‌کنیم:

$$|\frac{x-۲}{۲x+۱}|>۱\Rightarrow\frac{|x-۲|}{|۲x+۱|}>۱\xRightarrow{\times|۲x+۱|}|x-۲|>|۲x+۱|$$

(توجه کنید که $|۲x+۱|$ نامنفی بوده و ضرب طرفین نامعادله در آن جهت نامعادله را عوض نمی‌کند.)

**پله‌ی دوم:** طرفین را به توان ۲ رسانده (با توجه به نامنفی بودن آن‌ها) و سپس مجموعه جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$|x-۲|>|۲x+۱|\xRightarrow{\text{به توان۲}}x^۲-۴x+۴>۴x^۲+۴x+۱$$
$$\Rightarrow -۳x^۲-۸x+۳>۰\Rightarrow ۳x^۲+۸x-۳<۰\Rightarrow(۳x-۱)(x+۳)<۰$$
$$\Rightarrow -۳<x<\frac{۱}{۳}$$

$-\frac{۱}{۲}$ را باید از بین جواب‌ها حذف کنیم. پس مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $\mathbf{(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})}$ درمی‌آید.

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی تابع fog را تعیین می‌کنیم:

$$fog(x)=f(g(x))=(۲g(x)-۳)^۲=(۲(x+۲)-۳)^۲$$
$$=(۲x+۱)^۲=۴x^۲+۴x+۱$$

**پله‌ی دوم:** نقطه‌ی تلاقی دو تابع f و fog را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=fog(x)\Rightarrow(۲x-۳)^۲=۴x^۲+۴x+۱$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+۹=۴x^۲+۴x+۱\Rightarrow ۱۶x=۸\Rightarrow\ \mathbf{x=\frac{۱}{۲}}$$

۷ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی تابع معکوس را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow y-۲=-\sqrt{x-۱}\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۲-y\xRightarrow{\text{به توان۲}}$$
$$x-۱=(۲-y)^۲=۴-۴y+y^۲\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$
$$\Rightarrow \mathbf{f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵}$$

**پله‌ی دوم:** دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است. پس داریم:

$$\sqrt{x-۱}\geq۰\Rightarrow-\sqrt{x-۱}\leq۰\Rightarrow۲-\sqrt{x-۱}\leq۲\Rightarrow y\leq۲$$
$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۲]\Rightarrow\ \mathbf{D_{f^{-۱}}=(-\infty,۲]}$$

۸ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی مثلثاتی را به‌صورت ساده شده می‌نویسیم:

$$\sin^۴x-\cos^۴x=(\sin^۲x-\cos^۲x)\underbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)}_{۱}=\sin^۲x-\cos^۲x$$
$$=-(\cos^۲x-\sin^۲x)=-\cos۲x$$
$$\sin\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

**پله‌ی دوم:** جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی را تعیین می‌کنیم:

$$\cos۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\ \mathbf{x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}}$$

# کنکور ۹۳

۱ ـ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\,.\,(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲ ـ دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$، مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد، $a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ ـ اگر $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{xf(x)}$، کدام بازه است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۴ ـ حاصل عبارت $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^{۹}+\dots+t+۱}{t^{۹}+t^{۶}+t^{۳}+۱}$، به‌ازای $t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵ ـ در کدام بازه از مقادیر $X$، نمودار تابع $y=\sqrt{۵-۴x-x^۲}$، در بالای نمودار تابع $y=|x-۳|+۲$، قرار دارد؟

۱) $(\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲},۵)$ ۲) $(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})$ ۳) $(۲,\frac{۴+\sqrt{۱۵}}{۲})$ ۴) $(۲,۲+\sqrt{۱۵})$

۶ ـ اگر $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$ باشند. تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+۲$ ۲) $x^۲-۴x+۵$ ۳) $x^۲-۲x+۵$ ۴) $x^۲-۲x+۳$

۷ ـ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\sin x}=۲\cos^۲ x$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۸ ـ حاصل $\cos(۳\sin^{-۱}\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲۳}{۲۷}$ ۲) $-\frac{۱۹}{۲۷}$ ۳) $-\frac{۵}{۹}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

۹ ـ با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

| $x-۴۴$ | $-۳$ | $-۱$ | ۱ | ۳ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی | ۴ | ۷ | ۵ | ۳ | ۱ |

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

۱۰ ـ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به‌صورت زیر است:

A:۱۵,۱۴,۱۵,۱۶,۱۹

B=۱۶,۱۴,۱۷,۱۴,۱۷,۱۸

دقت عمل کدام بیش‌تر است؟

۱) A ۲) B ۳) یک‌سان ۴) غیرپیش‌بینی

# پاسخ‌های کنکور ۹۳

۱ ـ ④ واضح است که $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$، پس:

$$\text{عبارت}=(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}$$

**روش دوم: چشم‌انداز:** (**تحویل رادیکال مرکب**) رادیکال مرکب $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ به شرطی تحویل‌پذیر (ساده‌شدنی) است که $a^2-b$ مربع کامل باشد و چنان‌چه $a^2-b=c^2$، آن‌گاه داریم: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$

با توجه به چشم‌انداز فوق چون $2^2-3=1=1^2$، پس $c=1$ و داریم:

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$$

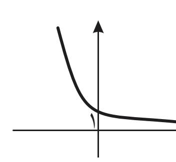
اکنون داریم: $\text{عبارت}=(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}})\sqrt{2}=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}$

۲ ـ ④ اگر $f^{-1}(g(a))=6$، آن‌گاه $f(6)=g(a)$، پس داریم:

$$2\times6-5=g(a)\Rightarrow g(a)=7\Rightarrow(a,7)\in g$$

و چون $(4,7)\in g$، پس $a=4$.

۳ ـ ③ می‌دانیم اگر $0<a<1$ باشد، نمودار تابع $y=a^x$ به شکل مقابل است با توجه به این نمودار، اگر $a=\frac{1}{2}$ و $x<0$ باشد، آن‌گاه $(\frac{1}{2})^x>1$ یا $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x<0$ و چون $x<0$ است، پس $xf(x)>0$ است؛ یعنی تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای xها منفی تعریف شده است.




اگر $a=\frac{1}{2}$ و $x>0$ باشد، آن‌گاه با توجه به نمودار فوق $(\frac{1}{2})^x<1$ یا $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x>0$ و چون $x>0$ است، پس $xf(x)>0$ است؛ یعنی تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای xها مثبت نیز تعریف شده است.

به‌ازای $x=0$، $\sqrt{xf(x)}=0$ است، پس تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای هرعدد حقیقی x تعریف شده است و دامنه‌اش $\mathbb{R}$ است.

۴ ـ ① صورت کسر موردنظر، مجموع دوازده جمله‌ی اولیه‌ی تصاعدی هندسی با قدرنسبت t است، پس:

$$\text{صورت کسر}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{1\times(t^{12}-1)}{t-1}=\frac{t^{12}-1}{t-1}$$

مخرج کسر موردنظر نیز مجموع چهارجمله‌ی اولیه یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $t^3$ است، پس: $\text{مخرج کسر}=\frac{1\times((t^3)^4-1)}{t^3-1}=\frac{t^{12}-1}{t^3-1}$

در نتیجه: $\text{کسر موردنظر}=\frac{\frac{t^{12}-1}{t-1}}{\frac{t^{12}-1}{t^3-1}}=\frac{t^3-1}{t-1}=t^2+t+1=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

اما چون $t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$، پس $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ در نتیجه:

$$\text{کسر موردنظر}=(\frac{\sqrt{5}}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$$

۵ ـ ② **روش اول:** در واقع می‌خواهیم رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$|x-3|+2<\sqrt{5+4x-x^2}$$

ریشه‌ی عبارت درون قدرمطلق $x=3$ است، پس دو حالت در نظر می‌گیریم.

**الف) $x\geq3$:** در این حالت $|x-3|+2=x-3+2=x-1$، پس:

$$x-1<\sqrt{5+4x-x^2}\Rightarrow x^2-2x+1<5+4x-x^2\Rightarrow 2x^2-6x-4<0$$

ریشه‌های این عبارت $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ هستند و جواب نامعادله $\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ است و چون باید $x\geq3$ باشد، در نتیجه: (۱)

**ب) $x<3$:** در این حالت $|x-3|+2=-x+3+2=-x+5$، پس:

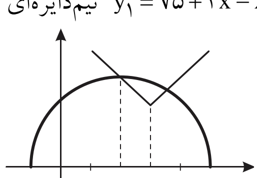
$$-x+5<\sqrt{5+4x-x^2}\Rightarrow x^2-10x+25<5+4x-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-14x+20<0$$

ریشه‌های این عبارت ۲ و ۵ هستند و جواب نامعادله $2<x<5$ می‌باشد و چون باید $x<3$ باشد، پس جواب کلی آن (۲) $2<x<3$ است.

اجتماع (۱) و (۲) بازه‌ی $2<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ می‌باشد.

**روش دوم:** نمودار تابع $y_1=\sqrt{5+4x-x^2}=\sqrt{9-(x-2)^2}$ نیم‌دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و شعاع ۳ است. نمودار این تابع در شکل مقابل نمایش داده شده است. طول یک نقطه‌ی برخورد دو تابع $x=2$ و طول نقطه‌ی دیگر ریشه‌ی معادله $x-1=\sqrt{5+4x-x^2}$ است که $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ می‌باشد، لذا در بازه‌ی $(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$ نمودار $y_1$ بالای $y_2$ است.



توجه کنیم که روش ترسیم آن هم در مدت زمانی کوتاه که دقت در رسم بسیار پایین است خیلی مناسب نیست و نمی‌توان مثلاً با قاطعیت بگوییم ریشه‌ی دوم برخورد دو تابع بین ۳ و ۴ است و از بین گزینه‌ها $\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$ را که بین ۳ و ۴ قرار دارد انتخاب کنیم.

۶ ـ (۳) $(fog)(x)=f(۲x-۳)$ است، پس:

$(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)\Rightarrow f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۶x+۲$

قرار می‌دهیم $۲x-۳=u$، بنابراین $x=\frac{u+۳}{۲}$، در نتیجه:

$f(u)=۴+(\frac{u+۳}{۲})^۲-۱۶\times\frac{u+۳}{۲}+۲۰$

$=(u^۲+۶u+۹)-۸u-۲۴+۲۰=u^۲-۲u+۵$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x+۵$.

۷ ـ (۲) می‌دانیم $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$، پس:

$\frac{\sin ۳x}{\sin x}=۳-۴\sin^۲ x$

اکنون داریم: $۳-۴\sin^۲ x=۲\cos^۲ x\Rightarrow ۳-۴(۱-\cos^۲ x)=۲\cos^۲ x$

$۲\cos^۲ x-۱=۰\Rightarrow \cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

۸ ـ (۱) اگر فرض کنیم $\sin^{-۱}\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}=\alpha$، آن‌گاه $\sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ است. از طرفی:

$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۱}{۳}$

چون $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، پس $\cos\alpha>۰$، بنابراین $\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$

$\cos(۳\sin^{-۱}\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha=\frac{۴}{۲۷}-۱=-\frac{۲۳}{۲۷}$

۹ ـ (۱) میانگین داده‌های $x-۴۴$ برابر است با:

$\overline{x-۴۴}=\frac{\sum(x-۴۴)f_i}{\sum f}=\frac{-۳\times۴+(-۱)\times۷+۱\times۵+۳\times۳+۵\times۱}{۴+۷+۵+۳+۱}$

$=\frac{-۱۲-۷+۵+۹+۵}{۲۰}=۰$

اما $\overline{x-۴۴}=\bar{x}-۴۴=۰\Rightarrow\bar{x}=۴۴$

$\sigma^۲_{(x-۴۴)}=\frac{\sum[(x_i-۴۴)-\overline{x-۴۴}]^۲f_i}{\sum f_i}$

$=\frac{(-۳-۰)^۲\times۴+(-۱-۰)^۲\times۷+(۱-۰)^۲\times۵+(۳-۰)^۲\times۳+(۵-۰)^۲\times۱}{۲۰}$

$=\frac{۳۶+۷+۵+۲۷+۲۵}{۲۰}=۵$

$\sigma^۲_{(x-۴۴)}=\sigma^۲_x=۵\Rightarrow\sigma=\sqrt{۵}$

$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴۴}\simeq\frac{۲/۲}{۴۴}=\frac{۰/۱}{۲}=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$

۱۰ ـ ؟ میانگین داده‌های A $=\frac{۱۵+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۹}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$

واریانس داده‌های A =

$\sigma^۲_A=\frac{(۱۵-۱۶)^۳+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۵-۱۶)^۲+(۱۶-۱۶)^۲+(۱۷-۱۶)^۲+(۱۹-۱۶)^۲}{۶}$

$=\frac{۱+۴+۱+۰+۱+۹}{۶}=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$

میانگین داده‌های B $=\frac{۱۶+۱۴+۱۷+۱۴+۱۷+۱۸}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$

واریانس داده‌های B =

$\sigma^۲_B=\frac{(۱۶-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۷-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۷-۱۶)^۲+(۱۸-۱۶)^۲}{۶}$

$=\frac{۰+۴+۱+۴+۱+۴}{۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$

پس پراکندگی داده‌های B کم‌تر از پراکندگی داده‌های A است و بنابراین دقت عمل B بیش‌تر از A است.