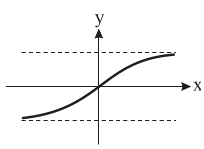
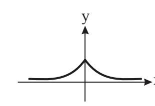
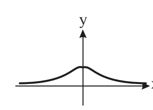
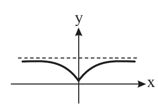
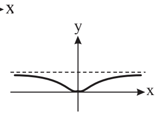
کنکور ۹۳

۱ ـ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه $A(۱,۵)$ و $B(۷,-۲)$، بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۰   ۴) ۱۱

۲ ـ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$، به کدام صورت است؟

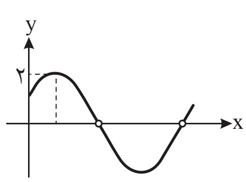


۱)    ۲)    ۳)    ۴) 

۳ ـ در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}e^{-x}$، صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

۱) $(۰,۳-\sqrt{۳})$ ۲) $(۳-\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(۳,۳+\sqrt{۳})$ ۴) $(۳+\sqrt{۳},+\infty)$

۴ ـ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{a\sin ۲x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دوره تناوب است. A کدام است؟



۱) -۱

۲) ۱

۳) $\sqrt{۲}$

۴) ۲

۵ ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y=x^{۲}|x|$ و خط به معادله $y=۸$، کدام است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۸   ۳) ۲۲   ۴) ۲۴

۶ ـ حاصل $\int_{۱}^{۱۶}[\sqrt{x}]dx$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

۱) ۳۰   ۲) ۳۱   ۳) ۳۲   ۴) ۳۴

پاسخ‌های کنکور ۹۳

۱ ـ ④ با دو روش حل می‌کنیم؛ روش اول با استفاده از روش بهینه‌سازی است که در این مسئله‌ی خاص محاسبات نسبتاً طولانی لازم دارد و روش دوم، متکی بر نگرشی هندسی می‌باشد.

روش اول: اگر نقطه‌ی موردنظر روی محور xها $C(x,۰)$ باشد، آن‌گاه $AC=\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}$ و $BC=\sqrt{(x-۷)^۲+۴}$، در نتیجه:

$$y=|AC-BC|\Rightarrow y=|\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}|$$

می‌خواهیم y ماکزیمم باشد، پس باید داشته باشیم $y'=۰$. می‌دانیم مشتق تابع $|u|$ با فرض $u\neq ۰$ برابر $\frac{u'u}{|u|}$، در نتیجه:

$$y'=\frac{\left(\frac{x-۱}{\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}-\frac{x-۷}{\sqrt{(x-۷)^۲+۴}}\right)\left(\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}\right)}{|\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}|}$$

$$y'=۰\Rightarrow\frac{x-۱}{\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}=\frac{x-۷}{\sqrt{(x-۷)^۲+۴}}$$

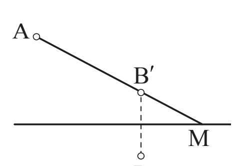
$$\Rightarrow\frac{x-۱}{x-۷}=\sqrt{\frac{(x-۱)^۲+۲۵}{(x-۷)^۲+۴}}\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{(x-۷)^۲}=\frac{(x-۱)^۲+۲۱}{(x-۱)^۲+۴}$$

$$\Rightarrow(x-۱)^۲(x-۷)^۲+۴(x-۱)^۲=(x-۷)^۲(x-۱)^۲+۲۵(x-۷)^۲$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{(x-۷)^۲}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow\frac{x-۱}{x-۷}=\pm\frac{۵}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۱\\x=\frac{۳۷}{۷}\end{cases}$$

به‌ازای $x=\frac{۳۷}{۷}$ عرض تابع کم‌تر از عرض آن در $x=۱۱$، پس به‌ازای $x=۱۱$ تابع موردنظر ماکزیمم مطلق است.

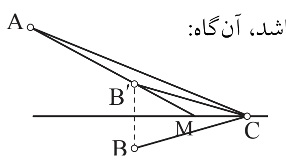
روش دوم: اگر دو نقطه‌ی A و B در طرفین خط ثابت d باشند، نقطه‌ای که روی خط d واقع باشد و اختلاف فواصل آن از A و B ماکزیمم باشد بدین صورت مشخص می‌شود



که قرینه‌ی یکی از این دو نقطه مثلاً B را نسبت به d، B' می‌نامیم؛ امتداد AB' خط d را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. M همان نقطه‌ی مطلوب است. (اثبات این مسئله‌ی هندسی در پایان حل مسئله ارائه شده است.)

قرینه‌ی $B(۷,-۲)$ نسبت به محور xها نقطه‌ی $B'(۷,۲)$ است. معادله‌ی AB' را پیدا می‌کنیم شیب این خط $m=\frac{۵-۲}{۱-۷}=-\frac{۱}{۲}$ و معادله‌اش $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱۱}{۲}$ است. چون M روی این خط و محور xها قرار دارد پس عرض نقطه‌ی M، صفر است و داریم $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱۱}{۲}=۰$ یا $x=۱۱$.

اثبات: اگر M نقطه‌ی برخورد AB' با d باشد، آن‌گاه:



$$|MA-MB|=|MA-MB'|=AB'$$

چنان‌چه C نقطه‌ای دل‌خواه از d به جز نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه در مثلث $CB'A$ داریم: $|CA-CB|=|CA-CB'|<AB'=|MA-MB|$

۲ ـ ① و ② شیب مماس بر نمودار تابع $f(x)$ همواره مثبت است؛ یعنی مشتق تابع همه‌جا مثبت می‌باشد و هر ۴ گزینه این ویژگی را دارند. اما وقتی $x\to\pm\infty$، شیب مماس به صفر میل می‌کند، پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند.

از طرفی مبدأ مختصات، نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است ولی نمی‌توان گفت که تابع در این نقطه مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم است در نتیجه هر دو گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانند درست باشند.

به عنوان مثال، اگر $f(x)=\tan^{-۱}x$ باشد، نمودار آن شبیه نمودار داده شده در مسئله است و $f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ و نمودار f' شبیه گزینه‌ی ۲ است و چون $f''(x)=\frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲}$ پس $f''(۰)=۰$ یعنی تابع در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم می‌باشد.

اما اگر $f(x)=\begin{cases}۱-e^{-x} & x\geq ۰\\-۱+e^{x} & x<۰\end{cases}$ باشد، نمودار آن نیز شبیه نمودار داده شده در مسئله می‌باشد. از طرفی $f'(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq ۰\\e^{x} & x<۰\end{cases}$، پس $f'_+(۰)=f'_-(۰)=۱$ است ضمناً چون $f''(x)=\begin{cases}-e^{-x} & x>۰\\e^{x} & x<۰\end{cases}$ در این صورت $f''_+(۰)=-۱$ و $f''_-(۰)=+۱$ است و تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم نمی‌باشد. پس نمودار f' شبیه گزینه‌ی ۱ می‌باشد.

۳ ـ ① چون تابع باید صعودی باشد، پس باید $f'(x)>۰$ باشد. داریم:

$$f'(x)=۳x^۲e^{-x}-x^۳e^{-x}$$

$$=(۳x^۲-x^۳)e^{-x}>۰\xRightarrow{e^{-x}>۰}۳x^۲-x^۳>۰\Rightarrow x^۲(۳-x)>۰$$

جواب نامعادله‌ی اخیر (۱) $x<۳$ است.

چون می‌خواهیم تقعر تابع رو به بالا باشد، پس باید $f''(x)>0$ باشد، داریم:

$$f''(x)=(6x-3x^2)e^{-x}-(3x^2-x^3)e^{-x}$$

$$=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}>0 \xRightarrow{e^{-x}>0} x(x^2-6x-6)>0$$

ریشه‌های این عبارت صفر و $3\pm\sqrt{3}$ هستند و جواب نامعادله $0<x<3-\sqrt{3}$ با $x>3+\sqrt{3}$ هستند. اشتراک (۱) و جواب‌های اخیر، $0<x<3-\sqrt{3}$ است.

۴ ـ (۳) با توجه به شکل، تابع در دو نقطه تعریف نشده است (نقطه‌های توخالی) ولی در این دو نقطه دارای حد است. این دو نقطه، ریشه‌های مخرج تابع در یک دوره‌ی تناوب هستند و چون تابع در این دو نقطه حد دارد، پس باید این دو ریشه، ریشه‌های صورت نیز باشند تا به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در آید و پس از رفع ابهام حدشان صفر شود.

$$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$x=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow a\sin\frac{3\pi}{2}+b=0 \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow a=b$$

$$x=\frac{7\pi}{4} \Rightarrow a\sin\frac{7\pi}{2}+b=0 \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow a=b$$

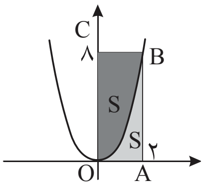
بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر است:

$$y=\frac{a\sin 2x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(1+\sin 2x)}{\sin x\cos x}=\frac{a(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

$$y=a\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \to \max(y)=a\sqrt{2}$$

با توجه به شکل ماکزیمم مقدار تابع برابر ۲ است پس $a\sqrt{2}=2$ یا $a=\sqrt{2}$.

۵ ـ (۴) **روش اول:** $y=x^2|x|=\begin{cases} x^3 & : x\geq 0 \\ -x^3 & : x<0 \end{cases}$ و نمودار آن به شکل مقابل است. برای پیدا کردن مساحت کل، مساحت S_1 را پیدا و سپس دو برابر می‌کنیم از طرفی با توجه به شکل داریم:



$S'=\int_0^2 x^3dx$ و $S_1=S_{OABC}-S$

پس: $S_1=S_{OABC}-\int_0^2 x^3dx=2\times 8-[\frac{1}{4}x^4]_0^2=12$

مساحت کل $=2S_1=24$

روش دوم: کافی است مساحت محصور بین $y=x^2|x|$ و خط $y=8$ را پیدا کنیم. ریشه‌های برخورد این دو تابع $x=-2$ و $x=2$ هستند، پس:

$$S=|\int_{-2}^{2}(\underbrace{x^2|x|-8}_{\text{تابع زوج}})dx|=|2\int_0^2(x^2\underbrace{|x|}_{=x}-2)dx|=|2\int_0^2(x^3-2)dx|$$

$$=|2[\frac{1}{4}x^4-8x]_0^2|=|2[\frac{16}{4}-16]-0|=24$$

۶ ـ (۴) نقاطی از بازه‌ی $(1,16)$ که به‌ازای آن‌ها $\sqrt{x}$ عددی صحیح می‌شود عبارتند از ۴ و ۹، پس داریم:

$$\int_1^{16}\lfloor\sqrt{x}\rfloor dx=\int_1^4 dx+\int_4^9 2dx+\int_9^{16}3dx$$

$$=(4-1)+2(9-4)+3(16-9)=3+10+21=34$$