کنکور ۹۳

۱ ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲ ـ مشتق تابع $y=\cos^2(\tan^{-1}x)$، به‌ازای $x=1$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۳ ـ به‌ازای مقادیر $n \ge n_0$، اگر فاصله نقاط نظیر دنباله $\{\frac{4n+1}{3n-2}\}$ از نقطه هم‌گرایی خود، کم‌تر از ۰/۰۲ باشد. کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

۴ ـ حد عبارت $x[\frac{1}{x}]$، در کدام حالت عدد متناهی نیست؟

۱) $x \to 0^-$ ۲) $x \to 0^+$ ۳) $x \to -\infty$ ۴) $x \to +\infty$

۵ ـ تابع با ضابطه $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x$، در نقاط $x \in Z$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته ۳) همواره ناپیوسته ۴) همواره پیوسته

۶ ـ اگر $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۷ ـ از نقطه $A(2,-1)$، دو خط مماس بر منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-x$ رسم شده است. زاویه بین این دو خط مماس، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\tan^{-1}2$

۸ ـ مشتق راست تابع با ضابطه $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[3]{9x}$، در نقطه $x=-3$، کدام است؟

۱) $-\frac{16}{3}$ ۲) ۵- ۳) ۴- ۴) $\frac{7}{3}$

۹ ـ خط مماس بر منحنی تابع f، در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله $2y+x=7$ می‌باشد. اگر $g(x)=\frac{1}{x}f^{-1}(x)$، آن‌گاه $g'(2)$، کدام است؟

۱) $-\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ‌های کنکور ۹۳

۱ ـ ۲ می‌دانیم $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{1}{2}x^2$ و $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} 1+\frac{1}{2}u$، پس:

$$\text{عبارت} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{1}{2}x^2)^2-\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\times\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2}{x^2}=-\frac{3}{4}$$

۲ ـ ۱ با استفاده از رابطه‌ی $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ داریم:

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\tan^{-1}x)\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1+x^2}(-\sin(2\tan^{-1}x))$$

$$y'_{x=1}=\frac{1}{1+1}(-\sin\frac{2\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

۳ ـ ۲ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله $\frac{4}{3}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$|\frac{4\pi+1}{3n-2}-\frac{4}{3}|<0/02\Rightarrow|\frac{12n+3-12n+8}{3(3n-2)}|<\frac{1}{50}\Rightarrow\frac{11}{9n-9}<\frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow 9n-6>550\Rightarrow n>\frac{556}{9}=61/7\Rightarrow n\ge 62$$

پس کم‌ترین مقدار n، برابر ۶۲ است.

۴ ـ ۳ می‌دانیم $\lim_{x\to 0}x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=1$ است پس در گزینه‌های ۱ و ۲ حد تابع، متناهی است. اگر $x<-1$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$ در نتیجه $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=-1$، بنابراین $\lim_{x\to-\infty}x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=+\infty$ و نامتناهی است.

توجه کنیم که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0^+$، پس $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=0$ در نتیجه $x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=0$ و حدش نیز صفر و متناهی می‌باشد.

۵ ـ ۱ اگر $x=2k$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l} f(2k)=(-1)^{2k}\sin k\pi=0 \\ \lim\limits_{x\to 2k}f(x)=\lim(-1)^{\lfloor 2k\rfloor}\sin k\pi=0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{در نقاط صحیح و زوج پیوسته است.}$$

اگر $x=4k+1$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه:

$$f(4k+1)=(-1)^{\lfloor 4k+1\rfloor}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=-1$$

$$\lim_{x\to(4k+1)^+}f(x)=\lim(-1)^{4k}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$$

پس تابع در نقاط فرد که به‌صورت $4k+1$ باشند ناپیوسته است.

اگر $x=4k+3$، آن‌گاه:

$$f(4k+3)=(-1)^{\lfloor 4k+3\rfloor}\sin(3k\pi+\frac{3\pi}{2})=(-1)\times(-1)=1$$

$$\lim_{x\to(4k+3)^-}f(x)=\text{lin}(-1)^{4k+2}\sin(2k\pi+\frac{3\pi}{2})=1\times(-1)=-1$$

پس تابع در نقاط با طول فرد ناپیوسته می‌باشد و در نتیجه تنها در نقاط صحیح با طول زوج پیوسته است.

۶ ـ ۳ در همسایگی نقطه‌ی $x=3$ حد صورت -1 است برای این در هر دو سمت نقطه‌ی $x=3$ حد تابع $-\infty$ باشد باید ۳ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد؛ یعنی مخرج به صورت $(x-3)^2$ یا x^2-6x+9 می‌باشد، پس $a=-12$ و $b=18$ و در نتیجه $a+b=6$.

۷ ـ ۳ نقطه‌ی داده شده روی منحنی قرار ندارد؛ اگر شیب مماس وارد از نقطه‌ی مفروض بر تابع را m بگیریم، آن‌گاه معادله‌ی مماس به‌صورت $y=mx-2m-1$ است. چون این خط بر منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-x$ مماس است باید معادله‌ی حاصل از برخورد این خط با منحنی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\left\{\begin{array}{l} y=mx-2m-1 \\ y=\frac{1}{2}x^2-x \end{array}\right| =\frac{1}{2}x^2-x=mx-2m-1$$

$$\Rightarrow x^2-2(1+m)x+4m+2=0$$

این معادله باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta=4(1+m)^2-4(4m+2)=0\Rightarrow 4(m^2-2m-1)=0$$

ریشه‌های این معادله $m_1=1+\sqrt{2}$ و $m_2=1-\sqrt{2}$ هستند و چون $m_1m_2=-1$، پس دو مماس بر هم عمودند.

۸ ـ ۲ در سمت راست نقطه‌ی $x=-3$ داریم $\lfloor x\rfloor=-3$ و $|x|=-x$، پس ضابطه‌ی تابع در سمت راست نقطه‌ی $x=-3$ به‌صورت $f(x)=(-3+x)\sqrt[3]{9x}$ است. اکنون داریم:

$$f'(x)=\sqrt[3]{9x}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3+x)$$

$$f'_+(-3)=\sqrt[3]{9\times(-3)}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(-27)^2}}(-3-3)=-3+\frac{9\times(-6)}{3\times 9}=-5$$

۹ ـ ۱ اگر طول نقطه‌ی تماس ۳ باشد عرض آن $2y+3=7$ یا $y=2$ است، پس $f(3)=2$ و در نتیجه $f^{-1}(2)=3$ می‌باشد. از طرفی شیب خط مماس بر تابع در این نقطه $-\frac{1}{2}$ است پس $f'(3)=-\frac{1}{2}$ و در نتیجه $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(3)}=-2$. اکنون از طرفین رابطه‌ی $g(x)=\frac{1}{x}f^{-1}(x)$ مشتق می‌گیریم.

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}f^{-1}(x)+\frac{1}{x}(f^{-1})'(x)$$

$$x=2\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{4}f^{-1}(2)+\frac{1}{2}(f^{-1})'(2)$$

$$=-\frac{1}{4}\times 3+\frac{1}{2}\times(-2)=-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$$