ریاضی

۱۰۱ ـ حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}.(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 2 ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۲ ـ دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $f(x)=2x-5$، مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(a)=6$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳ ـ اگر $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{xf(x)}$، کدام بازه است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۰۴ ـ مساحت مثلثی به اضلاع ۷،۹،۱۲ واحد، کدام است؟

۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $14\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{5}$ ۴) $14\sqrt{5}$

۱۰۵ ـ حاصل عبارت $\frac{t^{11}+t^{10}+t^{9}+\cdots+t+1}{t^{9}+t^{6}+t^{3}+1}$، به‌ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۶ ـ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه $A(1,5)$ و $B(7,-2)$، بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۰۷ ـ در کدام بازه از مقادیر X، نمودار تابع $y=\sqrt{5-4x-x^2}$، در بالای نمودار تابع $y=|x-3|+2$، قرار دارد؟

۱) $(\frac{3-\sqrt{17}}{2},5)$ ۲) $(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$ ۳) $(2,\frac{4+\sqrt{15}}{2})$ ۴) $(2,2+\sqrt{15})$

۱۰۸ ـ اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)$ باشند. تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2-4x+2 ۲) x^2-4x+5 ۳) x^2-2x+5 ۴) x^2-2x+3

۱۰۹ ـ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x}=2\cos^2 x$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۱۰ ـ حاصل $\cos(3\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3})$، کدام است؟

۱) $-\frac{23}{27}$ ۲) $-\frac{19}{27}$ ۳) $-\frac{5}{9}$ ۴) $-\frac{4}{9}$

۱۱۱ ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۱۲ ـ مشتق تابع $y=\cos^2(\tan^{-1}x)$، به‌ازای $x=1$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۱۱۳ ـ به‌ازای مقادیر $n\ge n_0$، اگر فاصله نقاط نظیر دنباله $\{\frac{4n+1}{3n-2}\}$ از نقطه هم‌گرایی خود، کم‌تر از ۰/۰۲ باشد. کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

۱۱۴ ـ حد عبارت $x[\frac{1}{x}]$، در کدام حالت عدد متناهی نیست؟

۱) $x\to 0^-$ ۲) $x\to 0^+$ ۳) $x\to -\infty$ ۴) $x\to +\infty$

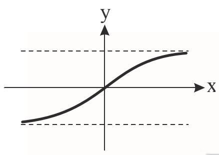
۱۱۵ ـ تابع با ضابطه $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x$، در نقاط $x\in Z$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟

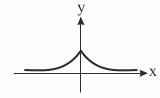
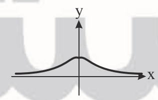
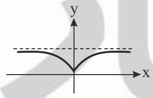
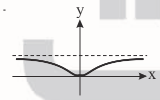
۱) فقط در اعداد زوج پیوسته ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته ۳) همواره ناپیوسته ۴) همواره پیوسته

۱۱۶ ـ اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۱۷ ـ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$، به کدام صورت است؟



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۱۸ ـ از نقطه $A(2,-1)$، دو خط مماس بر منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-x$ رسم شده است. زاویه بین این دو خط مماس، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\tan^{-1}2$

۱۱۹ ـ مشتق راست تابع با ضابطه $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[3]{9x}$، در نقطه $x=-3$، کدام است؟

۱) $-\frac{16}{3}$ ۲) -5 ۳) -4 ۴) $\frac{7}{3}$

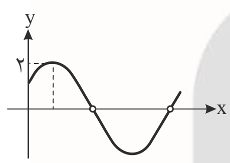
۱۲۰ ـ خط مماس بر منحنی تابع f، در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله $x+2y=7$ می‌باشد. اگر $g(x)=\frac{1}{x}f^{-1}(x)$، آنگاه $g'(2)$، کدام است؟

۱) $-\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۱ ـ در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x)=x^3e^{-x}$، صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

۱) $(0,3-\sqrt{3})$ ۲) $(3-\sqrt{3},3)$ ۳) $(3,3+\sqrt{3})$ ۴) $(3+\sqrt{3},+\infty)$

۱۲۲ ـ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دوره تناوب است. A کدام است؟



۱) -1
۲) 1
۳) $\sqrt{2}$
۴) 2

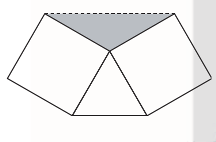
۱۲۳ ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y=x^2|x|$ و خط به معادله $y=8$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۲۴ ـ حاصل $\int_1^{16}[\sqrt{x}]dx$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

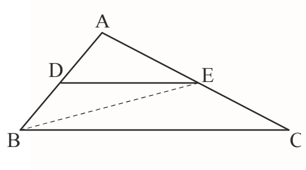
۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۱۲۵ ـ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



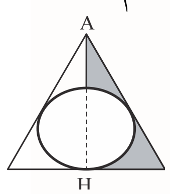
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
۳) 1 ۴) $\sqrt{3}$

۱۲۶ ـ در مثلث ABC، پاره‌خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{4}{5}DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۱۲۷ ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد، حجم حاصل از دوران هر دو سطح سایه‌زده شده، در حول ارتفاع AH، کدام است؟



۱) $\frac{4\pi}{3}$
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) 2π
۴) $\frac{5\pi}{3}$

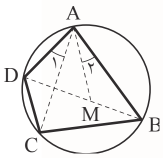
۱۲۸ ـ در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و اندازه قاعده‌ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی این ذوزنقه، چند برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۲۹ ـ در مثلث ABC، ضلع $AC=۶$ و میانه $BM=۵$، نیم‌سازهای دو زاویه AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کند. اندازه PQ کدام است؟

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴

۱۳۰ ـ در شکل مقابل $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$، حاصل AD.BC برابر کدام است؟



۱) DM.AC ۲) BM.AC ۳) AB.CD ۴) BD.BM

۱۳۱ ـ تصویر خط به معادله $۲x+۳y=۶$، تحت تبدیل $T(x,y)=(۲y-۱,x+۳)$، از نقطه‌ای با کدام مختصات، می‌گذرد؟

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۵,۰)$ ۴) $(۷,۰)$

۱۳۲ ـ دو خط متنافر d و d' و نقطه A مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطه A خطی بگذرد و بر هر دو خط d و d' عمود باشد. تعداد جواب، کدام است؟

۱) فاقد جواب ۲) همواره یک جواب ۳) بی‌شمار جواب ۴) یک جواب یا فاقد جواب

۱۳۳ ـ سه نقطه $A(۲,۱,۰)$، $B(۳,۱,-۱)$ و $C(-۱,۱,۳)$، رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۱۳۴ ـ دو بردار با تصاویر $a=(۱,-۲,۳)$ و $b=(۲,۱,-۱)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوح که بر روی سه بردار a، b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۳۵ ـ طول عمو مشترک دو خط به معادلات $\frac{z}{۲}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{x-۲}{۱}$ و $\begin{cases} x=۲y-۱ \\ z=۳y-۲ \end{cases}$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

۱۳۶ ـ در بیضی به معادله $۳x^۲+۴y^۲+۱۸x-۱۶y=۵$، مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۸

۱۳۷ ـ دو خط به معادلات $y=-۲x$ و $y=۲x+۴$، مجانب‌های یک هذلولی و $M(\frac{۳}{۲},۵)$ یکی از نقاط آن است. فاصله دو کانون این هذلولی، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۱۳۸ ـ اگر دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ab & ac & bc \\ bc & ab & ac \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-D$ ۲) D ۳) $(a+b+c)D$ ۴) $abcD$

۱۳۹ ـ اگر A ماتریس تبدیل $T(x,y)=(۲x-y,۳x-۴y)$ باشد و I ماتریس همانی، α و β دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$. مقدار β کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۴۰ ـ سه صفحه با معادله ماتریسی زیر داده شده است.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

وضعیت فصل مشترک دوبه‌دو صفحات نسبت به هم، چگونه است؟

۱) موازی هم ۲) منطبق بر هم ۳) عمود بر هم ۴) فاقد یکی از فصل مشترک‌ها

۱۴۱ ـ با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

$x-44$	-3	-1	1	3	5
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

۱۴۲ ـ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به‌صورت زیر است:

A: ۱۵,۱۴,۱۵,۱۶,۱۹

B = ۱۶,۱۴,۱۷,۱۴,۱۷,۱۸

دقت عمل کدام بیش‌تر است؟

۱) A ۲) B ۳) یک‌سان ۴) غیرپیش‌بینی

۱۴۳ ـ هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یک‌سان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم، تا به‌طور یقین دست‌کم دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴۴ ـ اگر $A=\{x\in N, 5<x^2<50\}$ و $B=\{3k-2 \mid k\in Z, 1\le k\le 4\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $(A\times B)\cap(B\times A)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۴۵ ـ تعداد افرازهای مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$، که شامل فقط یک مجموعه تک عضوی باشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۱۴۶ ـ آیا رابطه $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$، روی مجموعه $\mathbb{R}^2$ هم‌ارزی است. در صورت هم‌ارزی، نمودار $[(2,6)]$، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) هم‌ارزی نیست. ۲) $(1,2)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(2,3)$

۱۴۷ ـ دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{7}{12}$

۱۴۸ ـ در معادله $ax^2+bx=5$، ضریب a به تصادف عددی در بازه $[1,3]$ و ضریب b، به‌طور تصادفی عددی در بازه $[-3,0]$ انتخاب شده است. با کدام احتمال مجموع جواب‌های این معادله، بیش‌تر از $\frac{2}{3}$ است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۴۹ ـ درجه رأس‌های یک گراف ساده و همبند اعداد $4,3,1,a,b,c$، هستند. اگر p تعداد رأس‌های گراف، q تعداد یال‌های گراف و $q=\frac{3}{2}p$ باشد، تعداد جواب‌های مجموعه $\{a,b,c\}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۰ ـ هفت برابر عدد شش رقمی $\overline{abcabc}$، مربع کامل است. بیش‌ترین مقدار مجموعه ارقام عدد $\overline{abc}$، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۵۱ ـ دو برابر عدد طبیعی $N=\overline{abc}$، با تغییر مبنا به‌صورت $(a.bc)_6$ نوشته شده است. بیش‌ترین مقدار N، از مربع کامل، حداقل چند واحد کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۲ ـ به‌ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به‌صورت‌های $5n-2$ و $7n+3$، نسبت به هم غیراول‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۳ ـ تعداد رابطه‌های هم‌ارزی، روی مجموع $\{a,b,c,d\}$، که شامل (a,b) باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۴ ـ تعداد سه‌تایی مرتب، با مختص‌های صحیح و غیرمنفی، به‌طوری که مجموع هر سه مختص برابر ۱۰ و هر مختص کم‌تر از ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۵۵ ـ در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

پاسخ‌های پلکان آزمون

کنکور سراسری ۹۳ ـ رشته‌ی ریاضی

دیفرانسیل، حسابان و ریاضی پایه

۱۰۱ ـ (۴) واضح است که $\sqrt{۲}=\sqrt[۶]{۸}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$، پس:

$$عبارت=(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})\sqrt{۲}=\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^۲}=\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۲\sqrt{۳}$$

روش دوم: چشم‌انداز: (**تحویل رادیکال مرکب**) رادیکال مرکب $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ به شرطی تحویل‌پذیر (ساده‌شدنی) است که $a^۲-b$ مربع کامل باشد و چنان‌چه $a^۲-b=c^۲$، آن‌گاه داریم:

$$\sqrt{a\pm b}=\sqrt{\frac{a+c}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{۲}}$$

با توجه به چشم‌انداز فوق چون $۲^۲-۳=۱=۱^۲$، پس $c=۱$ و داریم:

$$\sqrt{۲\pm\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}\pm\sqrt{\frac{۲-۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}\pm۱}{\sqrt{۲}}$$

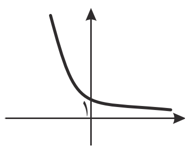
اکنون داریم: $عبارت=(\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}})\sqrt{۲}=\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۲\sqrt{۳}$

۱۰۲ ـ (۴) اگر $f^{-۱}(g(a))=۶$، آن‌گاه $f(۶)=g(a)$، پس داریم:

$$۲\times۶-۵=g(a)\Rightarrow g(a)=۷\Rightarrow(a,۷)\in g$$

و چون $(۴,۷)\in g$، پس $a=۴$.

۱۰۳ ـ (۳) می‌دانیم اگر $۰<a<۱$ باشد، نمودار تابع $y=a^x$ به شکل مقابل است با توجه به این نمودار، اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $x<۰$ باشد، آن‌گاه $(\frac{۱}{۲})^x>۱$ یا $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x<۰$ و چون $x<۰$ است، پس $xf(x)>۰$ است؛ یعنی تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای xها منفی تعریف شده است.



اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $x>۰$ باشد، آن‌گاه با توجه به نمودار فوق $(\frac{۱}{۲})^x<۱$ یا $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x>۰$ و چون $x>۰$ است، پس $xf(x)>۰$ است؛ یعنی تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای xها مثبت نیز تعریف شده است.

به‌ازای $x=۰$، $\sqrt{xf(x)}=۰$ است، پس تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌ازای هرعدد حقیقی x تعریف شده است و دامنه‌اش $\mathbb{R}$ است.

۱۰۴ ـ (۴) **روش اول:** اگر $a=۱۲$، $b=۹$ و $c=۷$ باشد، آن‌گاه بنابر رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۸۱+۴۹-۱۴۴}{۲\times۹\times۷}=\frac{-۱۴}{۲\times۹\times۷}=-\frac{۱}{۹}$$
$$\sin^۲ A=۱-\cos^۲ A=۱-\frac{۱}{۸۱}=\frac{۸۰}{۸۱}\Rightarrow\sin A=\pm\frac{\sqrt{۸۰}}{۹}$$

چون در مثلث $۰<A<\pi$ پس $\sin A>۰$ و در نتیجه $\sin A=\frac{\sqrt{۸۰}}{۹}$ اکنون داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}\times۹\times۷\times\frac{\sqrt{۸۰}}{۹}=\frac{۷}{۲}\times۴\sqrt{۵}=۱۴\sqrt{۵}$$

روش دوم: اگر P نصف محیط مثلث باشد (یعنی $P=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$)، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید که به رابطه‌ی **هرون** معروف است.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

باتوجه به چشم‌انداز فوق $P=\frac{۱۲+۹+۷}{۲}=۱۴$، پس:

$$S=\sqrt{۱۴(۱۴-۱۲)(۱۴-۹)(۱۴-۷)}=\sqrt{۱۴\times۲\times۵\times۷}=۱۴\sqrt{۵}$$

۱۰۵ ـ (۱) صورت کسر موردنظر، مجموع دوازده جمله‌ی اولیه‌ی تصاعدی هندسی با قدرنسبت t است، پس:

$$صورت\ کسر=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{۱\times(t^{۱۲}-۱)}{t-۱}=\frac{t^{۱۲}-۱}{t-۱}$$

مخرج کسر موردنظر نیز مجموع چهارجمله‌ی اولیه یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $t^۳$ است، پس:

$$مخرج\ کسر=\frac{۱\times((t^۳)^۴-۱)}{t^۳-۱}=\frac{t^{۱۲}-۱}{t^۳-۱}$$

در نتیجه: $کسر\ موردنظر=\dfrac{\frac{t^{۱۲}-۱}{t-۱}}{\frac{t^{۱۲}-۱}{t^۳-۱}}=\frac{t^۳-۱}{t-۱}=t^۲+t+۱=(t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$

اما چون $t=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۵}}{۲}$، پس $t+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ در نتیجه:

$$کسر\ موردنظر=(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}+\frac{۳}{۴}=۲$$

۱۰۶ ـ (۴) با دو روش حل می‌کنیم؛ روش اول با استفاده از روش بهینه‌سازی است که در این مسئله‌ی خاص محاسبات نسبتاً طولانی لازم دارد و روش دوم، متکی بر نگرشی هندسی می‌باشد.

روش اول: اگر نقطه‌ی موردنظر روی محور xها $C(x,0)$ باشد، آن‌گاه $AC=\sqrt{(x-1)^2+25}$ و $BC=\sqrt{(x-7)^2+4}$، در نتیجه:

$$y=|AC-BC| \Rightarrow y=\left|\sqrt{(x-1)^2+25}-\sqrt{(x-7)^2+4}\right|$$

می‌خواهیم y ماکزیمم باشد، پس باید داشته باشیم $y'=0$. می‌دانیم مشتق تابع $|u|$ با فرض $u\neq 0$ برابر $\frac{u'u}{|u|}$، در نتیجه:

$$y'=\frac{\left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+25}}-\frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+4}}\right)\left(\sqrt{(x-1)^2+25}-\sqrt{(x-7)^2+4}\right)}{\left|\sqrt{(x-1)^2+25}-\sqrt{(x-7)^2+4}\right|}$$

$$y'=0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+25}}=\frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+4}}$$

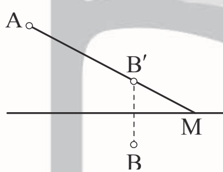
$$\Rightarrow \frac{x-1}{x-7}=\sqrt{\frac{(x-1)^2+25}{(x-7)^2+4}} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-7)^2}=\frac{(x-1)^2+21}{(x-1)^2+4}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-7)^2+4(x-1)^2=(x-7)^2(x-1)^2+25(x-7)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-7)^2}=\frac{25}{4} \Rightarrow \frac{x-1}{x-7}=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=\frac{37}{7} \end{cases}$$

به‌ازای $x=\frac{37}{7}$ عرض تابع کم‌تر از عرض آن در $x=11$، پس به‌ازای $x=11$ تابع موردنظر ماکزیمم مطلق است.

روش دوم: اگر دو نقطه‌ی A و B در طرفین خط ثابت d باشند، نقطه‌ای که روی خط d واقع باشد و اختلاف فواصل آن از A و B ماکزیمم باشد بدین صورت مشخص می‌شود

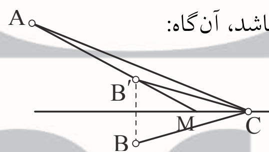


که قرینه‌ی یکی از این دو نقطه مثلاً B را نسبت به d، B' می‌نامیم؛ امتداد AB' خط d را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. M همان نقطه‌ی مطلوب است. (اثبات این مسئله‌ی هندسی در پایان حل مسئله ارائه شده است.)

قرینه‌ی $B(7,-2)$ نسبت به محور xها نقطه‌ی $B'(7,2)$ است. معادله‌ی AB' را پیدا می‌کنیم شیب این خط $m=\frac{5-2}{1-7}=-\frac{1}{2}$ و معادله‌اش $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ است. چون M روی این خط و محور xها قرار دارد پس عرض نقطه‌ی M، صفر است و داریم $-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}=0$ یا $x=11$.

اثبات: اگر M نقطه‌ی برخورد AB' با d باشد، آن‌گاه:

$$|MA-MB|=|MA-MB'|=AB'$$



چنان‌چه C نقطه‌ای دل‌خوا از d به جز نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه در مثلث $CB'A$ داریم:

$$|CA-CB|=|CA-CB'|<AB'=|MA-MB|$$

۱۰۷ ـ (۲) **روش اول:** در واقع می‌خواهیم رابطه‌ی $\sqrt{5+4x-x^2}<2+|x-3|$ برقرار باشد ریشه‌ی عبارت درون قدرمطلق $x=3$ است، پس دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) $x\geq 3$: در این حالت $2+|x-3|=x-3+2=x-1$، پس:

$$x-1<\sqrt{5+4x-x^2} \Rightarrow x^2-2x+1<5+4x-x^2 \Rightarrow 2x^2-6x-4<0$$

ریشه‌های این عبارت $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ هستند و جواب نامعادله $\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ است و چون باید $x\geq 3$ باشد، در نتیجه: (۱)

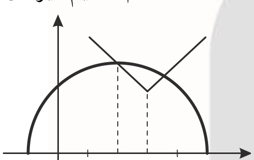
ب) $x<3$: در این حالت $2+|x-3|=-x+3+2=-x+5$، پس:

$$-x+5<\sqrt{5+4x-x^2} \Rightarrow x^2-10x+25<5+4x-x^2$$
$$\Rightarrow 2x^2-14x+20<0$$

ریشه‌های این عبارت ۲ و ۵ هستند و جواب نامعادله $2<x<5$ می‌باشد و چون باید $x<3$ باشد، پس جواب کلی آن (۲) $2<x<3$ است.

اجتماع (۱) و (۲) بازه‌ی $2<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: نمودار تابع $y_1=\sqrt{5+4x-x^2}=\sqrt{9-(x-2)^2}$ نیم‌دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و شعاع ۳ است. نمودار این تابع در شکل مقابل نمایش داده شده است. طول یک نقطه‌ی برخورد دو تابع $x=2$ و طول نقطه‌ی دیگر ریشه‌ی معادله $x-1=\sqrt{5+4x-x^2}$ است که $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ می‌باشد، لذا در بازه‌ی $(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$ نمودار y_1 بالای y_2 است.



توجه کنیم که روش ترسیم آن هم در مدت زمانی کوتاه که دقت در رسم بسیار پایین است خیلی مناسب نیست و نمی‌توان مثلاً با قاطعیت بگوییم ریشه‌ی دوم برخورد دو تابع بین ۳ و ۴ است و از بین گزینه‌ها $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ را که بین ۳ و ۴ قرار دارد انتخاب کنیم.

۱۰۸ ـ (۳) $(fog)(x)=f(2x-3)$ است، پس:

$$(fog)(x)=4(x^2-4x+5) \Rightarrow f(2x-3)=4x^2-16x+2$$

قرار می‌دهیم $u=2x-3$، بنابراین $x=\frac{u+3}{2}$، در نتیجه:

$$f(u)=4+\left(\frac{u+3}{2}\right)^2-16\times\frac{u+3}{2}+20$$
$$=(u^2+6u+9)-8u-24+20=u^2-2u+5$$

بنابراین $f(x)=x^2-2x+5$.

۱۰۹ ـ (۲) می‌دانیم $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$، پس $\frac{\sin 3x}{\sin x}=3-4\sin^2 x$ اکنون داریم:

$$3-4\sin^2 x=2\cos^2 x \Rightarrow 3-4(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x$$
$$2\cos^2 x-1=0 \Rightarrow \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

۱۱۰ ـ (۱) اگر فرض کنیم $\alpha = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$، آن‌گاه $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ و $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ است. از طرفی:

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

چون $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$، پس $\cos\alpha > 0$، بنابراین $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

$$\cos(3\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}) = \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{4}{27} - 1 = -\frac{23}{27}$$

۱۱۱ ـ (۲) می‌دانیم $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{1}{2}x^2$ و $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} 1+\frac{1}{2}u$، پس:

$$\text{عبارت} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{1}{2}x^2)^2 - \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-2\times\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2}{x^2} = -\frac{3}{4}$$

۱۱۲ ـ (۱) با استفاده از رابطه‌ی $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ داریم:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\tan^{-1}x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\times\frac{2}{1+x^2}(-\sin(2\tan^{-1}x))$$

$$y'_{x=1} = \frac{1}{1+1}(-\sin\frac{2\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

۱۱۳ ـ (۲) نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله $\frac{4}{3}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$|\frac{4\pi+1}{3n-2} - \frac{4}{3}| < 0/02 \Rightarrow |\frac{12n+3-12n+8}{3(3n-2)}| < \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{11}{9n-9} < \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow 9n-6 > 550 \Rightarrow n > \frac{556}{9} = 61/7 \Rightarrow n \geq 62$$

پس کم‌ترین مقدار n، برابر ۶۲ است.

۱۱۴ ـ (۳) می‌دانیم $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1$ است پس در گزینه‌های ۱ و ۲ حد تابع، متناهی است. اگر $x < -1$، آن‌گاه $-1 < \frac{1}{x} < 0$ در نتیجه $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = -1$، بنابراین $\lim_{x\to -\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = +\infty$ و نامتناهی است.

توجه کنیم که اگر $x \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x} \to 0^+$، پس $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$ در نتیجه $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$ و حدش نیز صفر و متناهی می‌باشد.

۱۱۵ ـ (۱) اگر $x = 2k$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l} f(2k) = (-1)^{2k}\sin k\pi = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2k} f(x) = \lim(-1)^{\lfloor 2k\rfloor}\sin k\pi = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

f در نقاط صحیح و زوج پیوسته است

اگر $x = 4k+1$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه:

$$f(4k+1) = (-1)^{\lfloor 4k+1\rfloor}\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = -1$$

$$\lim_{x\to(4k+1)^+} f(x) = \lim(-1)^{4k}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}) = 1$$

پس تابع در نقاط فرد که به‌صورت $4k+1$ باشند ناپیوسته است.

اگر $x = 4k+3$، آن‌گاه:

$$f(4k+3) = (-1)^{\lfloor 4k+3\rfloor}\sin(3k\pi + \frac{3\pi}{2}) = (-1)\times(-1) = 1$$

$$\lim_{x\to(4k+3)^-} f(x) = \text{lin}(-1)^{4k+2}\sin(2k\pi+\frac{3\pi}{2}) = 1\times(-1) = -1$$

پس تابع در نقاط با طول فرد ناپیوسته می‌باشد و در نتیجه تنها در نقاط صحیح با طول زوج پیوسته است.

۱۱۶ ـ (۳) در همسایگی نقطه‌ی $x = 3$ حد صورت ۱- است برای این در هر دو سمت نقطه‌ی $x = 3$ حد تابع $-\infty$ باشد باید ۳ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد؛ یعنی مخرج به صورت $(x-3)^2$ یا x^2-6x+9 می‌باشد، پس $a = -12$ و $b = 18$ و در نتیجه $a+b = 6$.

۱۱۷ ـ (۱) و (۲) شیب مماس بر نمودار تابع f(x) همواره مثبت است؛ یعنی مشتق تابع همه‌جا مثبت می‌باشد و هر ۴ گزینه این ویژگی را دارند. اما وقتی $x \to \pm\infty$، شیب مماس به صفر میل می‌کند، پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند.

از طرفی مبدأ مختصات، نقطه‌ی عطف تابع f(x) است ولی نمی‌توان گفت که تابع در این نقطه مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم است در نتیجه هر دو گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانند درست باشند.

به عنوان مثال، اگر $f(x) = \tan^{-1}x$ باشد، نمودار آن شبیه نمودار داده شده در مسئله است و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و نمودار f' شبیه گزینه‌ی ۲ است و چون $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ پس $f''(0) = 0$ یعنی تابع در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم می‌باشد.

اما اگر $f(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & x \geq 0 \\ -1+e^{x} & x < 0 \end{cases}$ باشد، نمودار آن نیز شبیه نمودار داده شده در مسئله می‌باشد. از طرفی $f'(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$، پس $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ است ضمناً چون $f''(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$ در این صورت $f''_+(0) = -1$ و $f''_-(0) = +1$ است و تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم نمی‌باشد. پس نمودار f' شبیه گزینه‌ی ۱ می‌باشد.

۱۱۸ ـ (۳) نقطه‌ی داده شده روی منحنی قرار ندارد؛ اگر شیب مماس وارد از نقطه‌ی مفروض بر تابع را m بگیریم، آن‌گاه معادله‌ی مماس به‌صورت $y = mx - 2m - 1$ است. چون این خط بر منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ مماس است باید معادله‌ی حاصل از برخورد این خط با منحنی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = mx - 2m - 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases} \Bigg| = \frac{1}{2}x^2 - x = mx - 2m - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(1+m)x + 4m + 2 = 0$$

این معادله باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta=4(1+m)^2-4(4m+2)=0\Rightarrow 4(m^2-2m-1)=0$$

ریشه‌های این معادله $m_1=1+\sqrt{2}$ و $m_2=1-\sqrt{2}$ هستند و چون $m_1m_2=-1$، پس دو مماس بر هم عمودند.

۱۱۹ ـ ۲ در سمت راست نقطه‌ی $x=-3$ داریم $\lfloor x\rfloor=-3$ و $|x|=-x$، پس ضابطه‌ی تابع در سمت راست نقطه‌ی $x=-3$ به‌صورت $f(x)=(-3+x)\sqrt[3]{9x}$ است. اکنون داریم:

$$f'(x)=\sqrt[3]{9x}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3+x)$$

$$f'_+(-3)=\sqrt[3]{9\times(-3)}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(-27)^2}}(-3-3)=-3+\frac{9\times(-6)}{3\times9}=-5$$

۱۲۰ ـ ۱ اگر طول نقطه‌ی تماس ۳ باشد عرض آن $2y+3=7$ یا $y=2$ است، پس $f(3)=2$ و در نتیجه $f^{-1}(2)=3$ می‌باشد. از طرفی شیب خط مماس بر تابع در این نقطه $-\frac{1}{2}$ است پس $f'(3)=-\frac{1}{2}$ و در نتیجه $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(3)}=-2$. اکنون از طرفین رابطه‌ی $g(x)=\frac{1}{x}f^{-1}(x)$ مشتق می‌گیریم.

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}f^{-1}(x)+\frac{1}{x}(f^{-1})'(x)$$

$$x=2\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{4}f^{-1}(2)+\frac{1}{2}(f^{-1})'(2)$$

$$=-\frac{1}{4}\times3+\frac{1}{2}\times(-2)=-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$$

۱۲۱ ـ ۱ چون تابع باید صعودی باشد، پس باید $f'(x)>0$ باشد. داریم:

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}$$

$$=(3x^2-x^3)e^{-x}>0\xRightarrow{e^{-x}>0}3x^2-x^3>0\Rightarrow x^2(3-x)>0$$

جواب نامعادله‌ی اخیر (۱) $x<3$ است.

چون می‌خواهیم تقعر تابع رو به بالا باشد، پس باید $f''(x)>0$ باشد، داریم:

$$f''(x)=(6x-3x^2)e^{-x}-(3x^2-x^3)e^{-x}$$

$$=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}>0\xRightarrow{e^{-x}>0}x(x^2-6x+6)>0$$

ریشه‌های این عبارت صفر و $3\pm\sqrt{3}$ هستند و جواب نامعادله $0<x<3-\sqrt{3}$ یا $x>3+\sqrt{3}$ هستند. اشتراک (۱) و جواب‌های اخیر، $0<x<3-\sqrt{3}$ است.

۱۲۲ ـ ۳ با توجه به شکل، تابع در دو نقطه تعریف نشده است (نقطه‌های توخالی) ولی در این دو نقطه دارای حد است. این دو نقطه، ریشه‌های مخرج تابع در یک دوره‌ی تناوب هستند و چون تابع در این دو نقطه حد دارد، پس باید این دو ریشه، ریشه‌های صورت نیز باشند تا به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در آید و پس از رفع ابهام حدشان صفر شود.

$$\sin x+\cos x=0\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$x=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow a\sin\frac{3\pi}{2}+b=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b$$

$$x=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow a\sin\frac{7\pi}{2}+b=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b$$

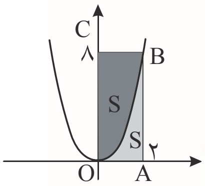
بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر است:

$$y=\frac{a\sin2x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(1+\sin2x)}{\sin x\cos x}=\frac{a(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

$$y=a\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\to\max(y)=a\sqrt{2}$$

با توجه به شکل ماکزیمم مقدار تابع برابر ۲ است پس $a\sqrt{2}=2$ یا $a=\sqrt{2}$.

۱۲۳ ـ ۴ **روش اول:** $y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & :x\ge0\\ -x^3 & :x<0\end{cases}$ و نمودار آن به شکل مقابل است. برای پیدا کردن مساحت کل، مساحت S_1 را پیدا و سپس دو برابر می‌کنیم از طرفی با توجه به شکل داریم: $S_1=S_{OABC}-S$ و $S'=\int_0^2x^3dx$، پس:



$$S_1=S_{OABC}-\int_0^2x^3dx=2\times8-[\frac{1}{4}x^4]_0^2=12$$

$2S_1=24=$ مساحت کل

روش دوم: کافی است مساحت محصور بین $y=x^2|x|$ و خط $y=8$ را پیدا کنیم. ریشه‌های برخورد این دو تابع $x=-2$ و $x=2$ هستند، پس:

$$S=\left|\int_{-2}^{2}\underbrace{(x^2|x|-8)}_{\text{تابع زوج}}dx\right|=\left|2\int_0^2(x^2\underbrace{|x|}_{=x}-2)dx\right|=\left|2\int_0^2(x^3-2)dx\right|$$

$$=\left|2[\frac{1}{4}x^4-8x]_0^2\right|=\left|2[\frac{16}{4}-16]-0\right|=24$$

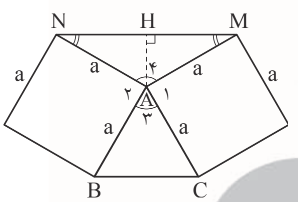
۱۲۴ ـ ۴ نقاطی از بازه‌ی $(1,16)$ که به‌ازای آن‌ها $\sqrt{x}$ عددی صحیح می‌شود عبارتند از ۴ و ۹، پس داریم:

$$\int_1^{16}\lfloor\sqrt{x}\rfloor dx=\int_1^4dx+\int_4^9 2dx+\int_9^{16}3dx$$

$$=(4-1)+2(9-4)+3(16-9)=3+10+21=34$$

هندسه پایه و تحلیلی

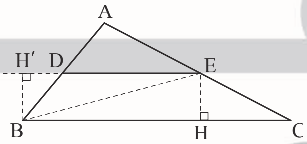
۱۲۵ ـ ۳ اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع a باشد، طول ضلع مربع‌ها نیز a هستند و چون $A_1=A_2=90^\circ$ و $A_3=60^\circ$،



پس $A_4=120^\circ$ است در مثلث AMN زاویه‌های M و N، 30° هستند و مثلث AMN در رأس A متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع AH، میانه و نیم‌ساز هم می‌باشد. به سادگی معلوم می‌شود طول ارتفاع AH برابر $\frac{a}{2}$ و $MH=NH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$، در نتیجه $MN=a\sqrt{3}$، بنابراین

$S_{AMN}=\frac{۱}{۲}MN\times AH=\frac{۱}{۲}\times a\sqrt{۳}\times\frac{a}{۲}=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ اما مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نیز برابر $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است در نتیجه، مساحت سایه‌زده مساوی مساحت مثلث اصلی است.

۱۲۶ ـ ۲ $DE \parallel BC \Rightarrow BH'=EH$

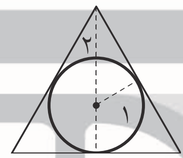


در نتیجه:

$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC\times EH}{\frac{۱}{۲}DE\times BH'}=\frac{BC}{DE}$$

از طرفی: $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

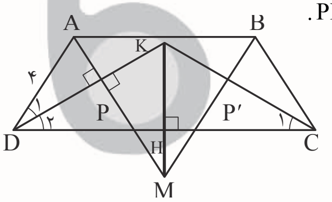
۱۲۷ ـ ۴ شکل حاصل از دوران سطح سایه‌زده شده یک مخروط به شعاع قاعده‌ی $\sqrt{۳}$ و ارتفاع $۳=۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است که کره‌ای از آن خارج شده است. ابتدا شعاع کره را محاسبه می‌کنیم.



می‌دانیم شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است، پس $r=\frac{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۶}=۱$، در نتیجه:

$$\text{حجم حاصل}=\frac{\pi}{۳}R^{۲}h-\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{\pi}{۳}(\sqrt{۳})^{۲}\times۳-\frac{۴}{۳}\pi\times۱^{۳}$$
$$=۳\pi-\frac{۴}{۳}\pi=\frac{۵\pi}{۳}$$

۱۲۸ ـ ۴ با رسم نیم‌سازهای زاویه‌های ذوزنقه، دو مثلث قائم‌الزاویه مانند APD و $BP'C$ به‌دست می‌آیند. چون $B_{۱}=۳۰^\circ$ و $AD=۴$ پس $AP=۲$ و $DP=۲\sqrt{۳}$ و چون مثلث AMB متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $AM=۶$ و در نتیجه $PM=۴$.

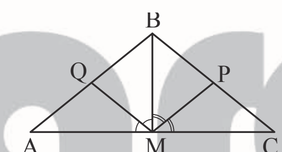


چون $D_{۲}=۳۰^\circ$ و $DH=۵$ پس $DK=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$ در نتیجه:

$$PK=DK-PD=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین: $S_{PMPH}=۲S_{PKM}=۲\times(\frac{۱}{۲}PK\times PM)=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\times۴=۱۶\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۲۹ ـ ۳ بنا به فرض $AM=MC$



ΔAMB: نیم‌ساز $MQ\Rightarrow\frac{PQ}{QA}=\frac{BM}{AM}=\frac{۵}{۳}$

ΔBMC: نیم‌ساز $MP\Rightarrow\frac{BP}{PC}=\frac{BM}{MC}=\frac{۵}{۳}$

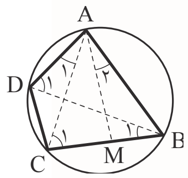
از این سه رابطه نتیجه می‌شود $\frac{PQ}{QA}=\frac{BP}{PC}$ و بنابر عکس قضیه‌ی تالس $PQ \parallel AC$.

اکنون از رابطه‌ی تالس داریم: $\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{BC}\quad(۱)$

از طرفی: $\frac{BP}{PC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{BP}{BP+PC}=\frac{۵}{۵+۳}\Rightarrow\frac{BP}{BC}=\frac{۵}{۸}\quad(۲)$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{PQ}{AC}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{PQ}{۶}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow PQ=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

۱۳۰ ـ ۱



$$\left.\begin{array}{r}A_{۱}=A_{۲}\Rightarrow D\hat{A}M=C\hat{A}B\\ \hat{D}_{۱}=\hat{C}_{۱}=\frac{\widehat{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ADM\sim ABC$$
$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{DM}{BC}$$

$AD\times BC=AC\times DM$

۱۳۱ ـ ۴ اگر تبدیل‌یافته‌ی نقطه‌ی (x,y) تحت این تبدیل، (X,Y) باشد، آن‌گاه:

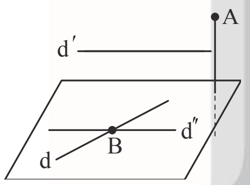
$$(X,Y)=(۲y-۱,x+۳)\Rightarrow\begin{cases}X=۲y-۱\Rightarrow y=\frac{X+۱}{۲}\\ Y=x+۳\Rightarrow x=Y-۳\end{cases}$$

اکنون این مقادیر را در معادله‌ی $۲x+۳y=۶$ قرار دهیم، معادله‌ی خط تبدیل‌یافته حاصل خواهد شد:

$$۲\times(Y-۳)+۳\times\frac{X+۱}{۲}=۶$$
$$۴۶-۱۲+۳X+۳=۱۲\Rightarrow۳X+۴Y=۲۱$$

و تنها نقطه‌ی $(۷,۰)$ در آن صدق می‌کند.

۱۳۲ ـ ۲ اگر از نقطه‌ای دل‌خواه روی d، خطی موازی d' رسم کنیم و آن را d'' بنامیم، از دو خط متقاطع d و d'' صفحه‌ای مانند P می‌گذرد این صفحه که شامل d و موازی d' است منحصربه‌فرد است و اگر از A عمودی بر P رسم کنیم، این خط هم بر d و هم بر d' عمود است و چون از یک نقطه فقط یک خط عمود بر صفحه‌ی P می‌توان رسم نمود، پس این خط منحصربه‌فرد است.



۱۳۳ ـ ۱

$$a=BC=\sqrt{(-۱-۳)^{۲}+(۱+۱)^{۲}+(۳-۲)^{۲}}=\sqrt{۲۱}$$
$$c=AB=\sqrt{(۳-۲)^{۲}+(-۱-۱)^{۲}+(۲-۰)^{۲}}=۳$$
$$b=AC=\sqrt{(-۱-۲)^{۲}+(۱-۱)^{۲}+(۳-۰)^{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

با توجه به رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}=\frac{۱۸+۹-۲۱}{۲\times۳\times۳\sqrt{۲}}=\frac{۶}{۱۸\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

۱۳۴ ـ ۳ $c=a\times b=(۱,-۲,۳)\times(۲,۱,-۱)=(-۱,۷,۵)$

$|a\times b|^{۲}=|(a\times b).(a\times b)|=|(a\times b).c|=$ حجم متوازی‌السطوح

$=(\sqrt{۱+۴۹+۲۵})^{۲}=۷۵$

۱۳۵ ـ ۲ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}t+۲\\-t-۲\\۳t\end{matrix}\right.$ روی خط اول و $B\left|\begin{matrix}۲t'-۱\\t'\\۳t'-۲\end{matrix}\right.$ روی خط دوم را در نظر می‌گیریم. اگر AB بر هر دو خط عمود باشد، طول AB همان طول عمودمشترک دو خط است.

$\overrightarrow{AB}=(۲t'-t-۳,t'+t+۲,۳t'-۳t-۲)$

AB بر خط اول عمود است $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.(۱,-۱,۳)=۰$

$\Rightarrow ۲t'-t-۳-t'-t-۲+۹t'-۹t-۶=۰$

$\Rightarrow ۱۰t'-۱۱t=۱۱ \quad (۱)$

AB بر خط دوم عمود است $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.(۲,۱,۳)=۰$

$\Rightarrow ۴t'-۲t-۶+t'+t+۲+۹t'-۹t-۶=۰$

$\Rightarrow ۱۴t'-۱۰t=۱۰ \quad (۲)$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم: $t=۱$ و $t'=۰$، پس $\overrightarrow{AB}=(-۲,۱,۱)$ در نتیجه $|AB|=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$.

۱۳۶ ـ ۴ مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون، برابر ۲a است، پس این بیضی را به فرم کانونیک تبدیل می‌کنیم:

$۳(x^{۲}+۶x+۹-۹)+۴(y^{۲}-۴y+۴-۴)=۵$

$۳(x+۳)^{۲}-۲۷+۴(y-۲)^{۲}-۱۶=۵$

$۳(x+۳)^{۲}+۴(y-۲)^{۲}=۴۸$

$\frac{(x+۳)^{۲}}{۱۶}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۱۲}=۱$

پس $a^{۲}=۱۶$ یا $a=۴$، در نتیجه مجموع فواصل هر نقطه از دو کانون بیضی برابر ۸ است.

۱۳۷ ـ ۴ اگر دوخط به معادلات $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ مجانب‌های یک هذلولی باشند، معادله‌ی آن هذلولی به‌صورت زیر است:

$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k$

چون $۲x+y=۰$ و $۲x-y+۴=۰$ مجانب‌های هذلولی هستند پس معادله‌اش به‌صورت روبه‌رو است: $(۲x+y)(۲x-y+۴)=k$

اما نقطه‌ی $M(\frac{۳}{۲},۵)$ باید در آن صدق کند:

$(۳+۵)(۳-۵+۴)=k\Rightarrow k=۱۶$

پس ضابطه‌ی هذلولی به‌صورت زیر است: $(۲x+y)(۲x-y+۴)=۱۶$

$۴x^{۲}-y^{۲}+۸x+۴y=۱۶$

$۴(x^{۲}+۲x+۱-۱)-(y^{۲}-۴y+۴-۴)=۱۶$

$۴(x+۱)^{۲}-(y-۲)^{۲}=۱۶\Rightarrow \frac{(x+۱)^{۲}}{۴}-\frac{(y-۲)^{۲}}{۱۶}=۱$

این یک هذلولی افقی است، پس $a^{۲}=۴$ و $b^{۲}=۱۶$ و $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۲۰$ یا $c=۲\sqrt{۵}$، در نتیجه فاصله کانونی $۲c=۴\sqrt{۵}$ است.

۱۳۸ ـ ۱ ستون اول را بر c، دوم را بر a و سوم را بر b تقسیم می‌کنیم:

$$D=abc\begin{vmatrix}\frac{۱}{c}&\frac{۱}{a}&\frac{۱}{b}\\b&c&a\\a&b&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab&bc&ac\\b&c&a\\a&b&c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}ab&bc&ac\\b&c&a\\a+b&b+c&a+c\end{vmatrix}$$ سطر دوم را به سطر اول اضافه می‌کنیم

$$=\begin{vmatrix}ab&b&a+b\\bc&c&b+c\\ac&a&a+c\end{vmatrix}$$ دترمینان هر ماتریس با ترانهاده‌اش برابر است

$$=-\begin{vmatrix}a+b&b&ab\\b+c&c&bc\\a+c&a&ac\end{vmatrix}$$ تعویض جای ستون‌های اول و دوم

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a+b&b&ab\\b+c&c&bc\\a+c&a&ac\end{vmatrix}=-D$$

۱۳۹ ـ ۳ ماتریس تبدیل با ضابطه‌ی $T(x,y)=[۲x-y,۳x-۴y]$ به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{bmatrix}$ می‌باشد و چون $|A|=۵$، در نتیجه داریم $A^{-۱}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&+۲\end{bmatrix}$ اکنون خواهیم داشت:

$$\alpha\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\alpha+\beta&-\alpha\\۳\alpha&-۴\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۳}{۵}&-\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲\alpha+\beta=\frac{۴}{۵}\\-\alpha=-\frac{۱}{۵}\end{cases}\Rightarrow\beta=\frac{۲}{۵}$$

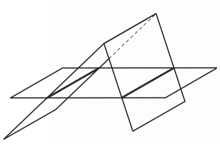
۱۴۰ ـ ۱ ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix}۲&-۱&۱\\۱&۳&-۱\\۱&-۱۱&۵\end{vmatrix}=۳۰-۱۱+۱-(۳+۲۲-۵)=۰$$

پس این سه صفحه نمی‌توانند در یک نقطه مشترک باشند. از طرفی:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}۶&-۱&۱\\۴&۳&-۱\\۲&-۱۱&۵\end{vmatrix}=۹۰-۴۴+۲-(۶+۶۶-۲۰)=۴۸-۵۲=-۶\neq۰$$

پس یا سه صفحه دوبه‌دو موازیند و یا فصل مشترک‌های دوبه‌دوی آن‌ها با هم موازی هستند. بردارهای نرمال سه صفحه $(۲,-۱,۱)$، $(۱,۳,-۱)$ و $(۱,-۱۱,۵)$ هستند و این بردارها موازی نیستند پس سه صفحه نمی‌توانند دوبه‌دو موازی باشند بنابراین فصل مشترک‌های دوبه‌دوی این صفحات با هم موازی هستند.



آمار

۱۴۱ ـ ۱ میانگین داده‌های $x-۴۴$ برابر است با:

$$\overline{x-۴۴}=\frac{\sum(x-۴۴)f_i}{\sum f}=\frac{-۳\times۴+(-۱)\times۷+۱\times۵+۳\times۳+۵\times۱}{۴+۷+۵+۳+۱}=\frac{-۱۲-۷+۵+۹+۵}{۲۰}=۰$$

اما $\overline{x-۴۴}=\bar{x}-۴۴=۰\Rightarrow \bar{x}=۴۴$

$$\sigma^{۲}_{(x-۴۴)}=\frac{\sum[(x_i-۴۴)-\overline{x-۴۴}]^{۲}f_i}{\sum f_i}$$

$$=\frac{(-۳-۰)^{۲}\times ۴+(-۱-۰)^{۲}\times ۷+(۱-۰)^{۲}\times ۵+(۳-۰)^{۲}\times ۳+(۵-۰)^{۲}\times ۱}{۲۰}$$

$$=\frac{۳۶+۷+۵+۲۷+۲۵}{۲۰}=۵$$

$$\sigma^{۲}_{(x-۴۴)}=\sigma^{۲}_{x}=۵\Rightarrow \sigma=\sqrt{۵}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴۴}\simeq\frac{۲/۲}{۴۴}=\frac{۰/۱}{۲}=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$$

۱۴۲ ـ ؟ میانگین داده‌های A $=\frac{۱۵+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۹}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$

واریانس داده‌های A =

$$\sigma^{۲}_{A}=\frac{(۱۵-۱۶)^{۳}+(۱۴-۱۶)^{۲}+(۱۵-۱۶)^{۲}+(۱۶-۱۶)^{۲}+(۱۷-۱۶)^{۲}+(۱۹-۱۶)^{۲}}{۶}$$

$$=\frac{۱+۴+۱+۰+۱+۹}{۶}=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

میانگین داده‌های B $=\frac{۱۶+۱۴+۱۷+۱۴+۱۷+۱۸}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$

واریانس داده‌های B =

$$\sigma^{۲}_{B}=\frac{(۱۶-۱۶)^{۲}+(۱۴-۱۶)^{۲}+(۱۷-۱۶)^{۲}+(۱۴-۱۶)^{۲}+(۱۷-۱۶)^{۲}+(۱۸-۱۶)^{۲}}{۶}$$

$$=\frac{۰+۴+۱+۴+۱+۴}{۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$$

پس پراکندگی داده‌های B کم‌تر از پراکندگی داده‌های A است و بنابراین دقت عمل B بیش‌تر از A است.

گسسته

۱۴۳ ـ (۳) بدترین حالت مجموعه‌ای است که در آن هیچ دو عددی مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک نداشته باشند. اگر عدد ۱ و همه‌ی عددهای اول ۲ تا ۳۰ را کنار هم قرار دهیم این مجموعه به‌وجود می‌آید.

$\{۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$

همان‌طور که می‌بینید، این مجموعه ۱۱ عضوی است ولی هیچ دو عضو آن ب.م.م‌شان بزرگ‌تر از ۱ نیست اما به محض اضافه کردن عضو دوازدهم به این مجموعه دست‌کم ۲ عدد دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱خواهند شد.

۱۴۴ ـ (۳)

$A=\{x\in\mathbb{N}\ ,\ ۵<x^{۲}<۵۰\}$

$\Rightarrow A=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

$B=\{۳k-۲|k\in\mathbb{Z}\ ,۱\le k\le ۴\}$

$\Rightarrow B=\{۱,۴,۷,۱۰\}$

می‌دانیم $A\times B\cap B\times A=(A\cap B)^{۲}$

$A\cap B=\{۴,۷\}$

بنابراین مجموعه‌ی $A\times B\cap B\times A$ دارای ۴ عضو و در نتیجه ۱۶ زیرمجموعه است.

۱۴۵ـ (۴) حالت‌هایی که مجموعه فقط یک مجموعه‌ی تک‌عضوی دارد به‌صورت‌های زیر است:

$\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=\binom{۵}{۱}=۵$

$\bigcirc|\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}}{۲}=۱۵$

بنابراین به ۲۰ روش مجموعه را می‌شود به‌صورتی افراز کرد که فقط یک مجموعه‌ی تک‌عضوی داشته باشد.

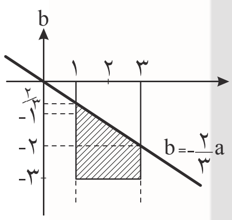
۱۴۶ ـ (۱) رابطه هم‌ارزی نیست چون ترایایی ندارد.

$(۲,۳)\ R(۰,۰)\ ,\ (۰,۰)R(۱۱,۲۷)\Rightarrow(۲,۳)\ \cancel{R}(۱۱,۲۷)$

۱۴۷ ـ (۱)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	•	•		•		•
۲	•		•		•	
۳		•		•		
۴	•		•			
۵		•				•
۶	•				•	

$P=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$



۱۴۸ ـ (۲) می‌دانیم در معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ مجموع ریشه‌های معادله برابر است با $-\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a}>\frac{۲}{۳}$

a مثبت است پس می‌توان با خیال راحت طرفین وسطین کرد.

$-b>\frac{۲}{۳}a\Rightarrow b<-\frac{۲}{۳}a$

حالا مساحت قسمت هاشورخورده به مساحت کل مستطیل را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{\frac{\frac{۷}{۳}+۱}{۲}\times ۲}{۲\times ۳}=\frac{۵}{۹}$$

۱۴۹ ـ (۳)

$q=\frac{۳}{۲}p,\ p=۶\Rightarrow q=۹\Rightarrow ۲q=۱۸$

$a+b+c+۴+۳+۱=۱۸\Rightarrow a+b+c=۱۰$

مجموع درجه‌های سه رأس دیگر باید برابر ۱۰ باشد حالت‌هایی که جمع سه عدد مثبت برابر ۱۰ می‌شود را می‌نویسیم:

دقت کنید درجه‌ی هیچ رأسی نباید بیش‌تر از ۵ باشد:

الف) ۱ ۴ ۵

ب) ۲ ۳ ۵

پ) ۲ ۴ ۴

ت) ۳ ۳ ۴

حالا باید دید با این سه عدد به‌علاوه‌ی ۴ و ۳ و ۱ می‌توان گراف تشکیل داد و با کدام نه.

الف) ۵ , ۴ , ۴ , ۳ , ۱ , ۱
۳ , ۳ , ۲ , ۰ , ۰

با استفاده از الگوریتم هاول حکیمی رد می‌شود

ب) ۵ , ۴ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱
۳ , ۲ , ۲ , ۱ , ۰
۱ , ۱ , ۰ , ۰

اگر با هاول حکیمی چک کنیم، می‌بینیم گراف قابل رسم است

پ) ۴ , ۴ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱
۳ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱
۲ , ۱ , ۰ , ۱

این هم با هاول حکیمی چک می‌کنیم می‌بینیم که قابل رسم است:

پ) ۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۳ , ۱
۳ , ۲ , ۲ , ۲ , ۱
۱ , ۱ , ۱ , ۱

و بالاخره این آخری را نیز اگر با الگوریتم هاول حکیمی بررسی کنیم، می‌بینیم که این دنباله نیز گرافی است:

۱۵۰ ـ (۱) عدد را باز می‌کنیم:

$$x=\overline{abcabc}=c+۱۰b+۱۰۰a+۱۰۰۰c+۱۰۰۰۰b+۱۰۰۰۰۰a$$

$$=۱۰۰۱۰۰a+۱۰۰۱۰b+۱۰۰۱c=۱۰۰۱(۱۰۰a+۱۰b+c)=۱۰۰۱\times\overline{abc}$$

با توجه به این‌که $۱۳\times۱۱\times۷=۱۰۰۱$ و $۷x$ مربع کامل است و در تجزیه‌ی عددهای مربع کامل، توان همه‌ی عوامل اول زوج است، پس $۱۰۰a+۱۰b+c$ باید مضارب ۱۱ و ۱۳ را داشته باشد.

$$\overline{abc}=۱۴۳a^۲$$

و از طرفی $\overline{abc}$ عددی سه‌رقمی است، یعنی باید کم‌تر از ۱۰۰۰ باشد بنابراین به q فقط می‌توان دو عدد ۱ و ۲ را نسبت داد.

$$q=۱\Rightarrow x=۱۴۳۱۴۳=(۱۰۰۱)^۲$$

$$q=۲\Rightarrow ۱۴۳q^۲=۵۷۲\Rightarrow x=۵۷۲۵۷۲=(۲۰۰۲)^۲$$

$$\max(\overline{abc})=۵۷۲\Rightarrow ۵+۷+۲=۱۴$$

۱۵۱ ـ (۱)

$$۲\times\overline{abc}=(a۰bc)_۶$$

$$\Rightarrow ۲۰۰a+۲۰b+۲c=c+۶b+۲۱۶a$$

$$\Rightarrow ۱۴b+c=۱۶a\Rightarrow c=۱۶a-۱۴b$$

c زوج است و از طرفی چون در مبنای ۶ تعریف شده است، کم‌تر از ۶ است.

$$c=۰\Rightarrow ۱۴b=۱۶a\Rightarrow ۷b=۸a$$

امکان‌پذیر نیست چون $۷b$ باید مضرب ۸ باشد یعنی b باید مضرب ۸ باشد که با توجه به کم‌تر از ۸ بودن b ناممکن است.

$$c=۲\Rightarrow ۱۴b+۲=۱۶a$$

$$۷b+۱=۸a\Rightarrow ۸a\overset{۷}{\equiv}۱$$

$$a\overset{۷}{\equiv}۱\Rightarrow a=۱$$

$$b=۱$$

$$c=۴\Rightarrow ۱۴b+۴=۱۶a$$

$$۷b+۲=۸a\Rightarrow ۸a\overset{۷}{\equiv}۲$$

$$a\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow a=۲$$

$$b=۲$$

$$\Rightarrow N_{max}=۲۲۴$$

که از ۲۲۵ که مربع کامل است، یک واحد کم‌تر است.

۱۵۲ ـ (۲)

$$(۷n+۳\ ,\ ۵n-۲)=d$$

$$\begin{array}{l} d|۷n+۳ \\ d|۵n-۲ \end{array}\ \overset{\times۵}{\underset{\times۷}{\Longrightarrow}}\ \begin{array}{l} d|۳۵n+۱۵ \\ d|۳۵n-۱۴ \end{array}\ \overset{\ominus}{\Longrightarrow} d|۲۹\Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲۹$$

دو عدد نسبت به هم اول نیستند پس $d=۲۹$

$$۵n-۲\overset{۲۹}{\equiv}۰\Rightarrow ۵n\overset{۲۹}{\equiv}۲\overset{\times۶}{\Rightarrow}۳۰n\overset{۲۹}{\equiv}۱۲\overset{\ominus}{\Rightarrow}۲۹n\overset{۲۹}{\equiv}۰\qquad n\overset{۲۹}{\equiv}۱۲$$

$$\Rightarrow n=۲۹q+۱۲$$

$$۱۰\le n\le ۹۹\Rightarrow q=۰,۱,۲,۳\Rightarrow$$

به‌ازای چهار مقدار n دو عدد نسبت به هم غیر اول‌اند.

۱۵۳ ـ (۳) وقتی می‌خواهیم رابطه‌ی هم‌ارزی ما زوج مرتب (a,b) را داشته باشد، در حقیقت دو عضو a,b باید در یکی از مجموعه‌های افراز باشند. بنابراین می‌توان فرض کرد a,b کلاً یک عضواند و بنابراین مجموعه‌ی ما سه عضوی خواهد شد. می‌دانیم مجموعه‌ی ۳ عضوی را به ۵ طریق می‌توان افراز کرد:

$$a,b=x\Rightarrow\{x,c,d\}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{array}{l} x\ \ c\ \ d \\ x\ |\ cd \\ x,c\ |\ d \\ x,d\ |\ c \\ x\,|\,d\,|\,c \end{array}$$

۱۵۴ ـ (۴) اگر سه‌تایی مرتب را با $(x_۱,x_۲,x_۳)$ نمایش دهیم، آن‌گاه می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$ را پیدا کنیم طوری که x_iها کوچک‌تر از ۶ باشند. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله بدون هیچ محدودیتی برابر است با:

$$|M|=\binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۲}{۲}=۶۶$$

اگر تعداد جواب‌هایی از معادله را که در آن $x_i\ge۶$ باشد با $|A_i|$ نمایش دهیم، آن‌گاه چنانچه $x_i=y_i+۶$ فرض شود، y_i عددی صحیح و نامنفی خواهد بود و در این صورت:

$$(y_۱+۶)+x_۲+x_۳=۱۰\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳=۴$$

و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

$$|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

اگر دو تا از x_iها بزرگ‌تر از یا مساوی ۶ باشند (مثلاً $x_۱$ و $x_۲$)، آن‌گاه:

$$(y_۱+۶)+(y_۲+۶)+x_۳=۱۰\Rightarrow y_۱+y_۲+x_۳=-۲$$

و این معادله جواب صحیح و نامنفی ندارد، پس $|A_i\cap A_j|=۰$ و به دلیل مشابه $|A_i\cap A_j\cap A_h|$.

اکنون بانبر اصل شمول و عدم شمول داریم:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی با فرض $x_i < ۶$

$$=|M|-\binom{۳}{۱}|A_i|+\binom{۳}{۲}|A_i \cap A_j|-\binom{۳}{۳}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$=۶۶-۳\times ۱۵+۰-۰=۲۱$$

۱۵۵ ـ ۲ یا هر چهار مهره باید سفید باشند یا هر چهارتای‌شان سیاه.

دو مهره‌ی خارج شده از ظرف اول سفید و دو مهره‌ی خارج شده از ظرف دوم نیز سفید باشد

$$=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۱۰}{۲۸}\times\frac{۶}{۱۵}$$

دو مهره‌ی خارج شده از ظرف اول سیاه و دو مهره‌ی خارج شده از ظرف دوم نیز سیاه باشد

$$=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۳}{۲۸}\times\frac{۱}{۱۵}$$

$$\Rightarrow P\,(\text{همرنگ بودن هر ۴ مهره})=\frac{۱۰}{۲۸}\times\frac{۶}{۱۵}+\frac{۳}{۲۸}\times\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۶۳}{۲۸\times ۱۵}=\frac{۱۵}{۱۰۰}$$