آفاردئون

هندسه تحلیلی

ماتریس و دستگاه معادلات

(فصل چهارم و پنجم)

ویژه‌ی دانش‌آموزان ریاضی

ریاضی

٥/٤٪

ویژه‌ی کنکور

پدیدآورنده:
محسن محمدکریمی

انتشارات علمی فار
phare
www.pharepub.com

به نام آن‌که موجودات را شکیل و جمیل آفرید

راهنمای آفاردئون:

- مجموعه‌ی آفاردئون هندسه‌ی تحلیلی یک آموزش جمع و جور و خلاصه‌ای منسجم، هم‌راه با تست‌های کنکورهای سراسری ۶ سال اخیر (داخل و خارج کشور) است.
- در آفاردئون از چهارچوب کنکور بیرون نرفتیم و حرف اضافه نگفتیم!
- با دقت و وسواس زیاد تست‌ها و مفاهیم را مرتب کردیم تا شما بتوانید در کم‌ترین زمان ممکن جمع‌بندی کنید.
- همه‌ی تست‌های هندسه‌ی تحلیلی رشته ریاضی در ۶ سال گذشته را آوردیم.
- هر جا که لازم بود تست‌های رشته‌ی تجربی ۶ سال اخیر با تست‌های سال‌های قبل‌تر رشته‌های ریاضی و تجربی را هم آوردیم تا مفاهیم را بهتر و کامل‌تر پوشش دهیم.
- پاسخ‌ها را در پایین همان صفحه که تستش هست آورده‌ایم تا خدای نکرده از ورق زدن‌های زیاد سرتان از استوانه‌ای به هرمی تغییر شکل ندهد!!

اما قبل ازشروع باید با نمادها و کلیدواژه‌های آفاردئونی آشنا شوید:

آموزش اصلی قبل از تست‌ها قرار گرفته و یک دید کلی درباره‌ی مبحث به شما می‌دهد.

فارمکث : بلافاصله بعد از یک تست می‌آید و شما را با نکته‌ای که آن تست دارد آشنا می‌کند و سوال‌های مشابه را نیز با فارمکث گزارش داده‌ایم.

: جغد دانا که دقتش خیلی بالاست؛ هرجا دلش خواست می‌آید و حرفی و نکته‌ای و توصیه‌ای می‌گوید.

[ ] : داخل این کروشه آدرس هر تست به اختصار داده شده؛

مثلا [ت۸۶خ] یعنی «تجربی ۸۶ خارج کشور» یا [ر۹۱د] یعنی «ریاضی ۹۱ داخل کشور».

درصدی که بر روی جلد در بالا و پایین آمده‌اند، نشان‌دهنده‌ی درصد تست‌هایی است که از این آفاردئون به ترتیب در کنکور رشته‌ی تجربی و سپس ریاضی می‌آید.

جدول فراوانی تست‌های مبحث ماتریس در ۶سال گذشته :

سهم این مبحث در کنکور ریاضی	تعداد تست‌های رشته‌ی ریاضی
۵/۴ درصد	۳

به هر حال این اولین چاپ آفاردئون ماتریس و دستگاه معادلات است و با آن که خیلی دقت کرده‌ایم، احتمال هرگونه خطا و اشتباه وجود دارد. از شما توقع داریم، که اگر به چنین مواردی برخوردید، ما را نیز آگاه کنید.

شاد باشید و پیروز
محسن محمدکریمی

انتشارات
علمی
فار
phare

انتشارات علمی فار
تلفن: ۶۶ ۵۹ ۷۹ ۹۹
www.PharePub.com
قیمت: ۴۰۰۰ تومان

9 786005 897951

ماتریس و دترمینان

■ ماتریس‌ها

• به آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی که در سطرها و ستون‌هایی کنار هم قرار دارند، ماتریس می‌گویند.

• اعداد داخل ماتریس را درایه می‌گویند که با a_{ij} نشان می‌دهند.

• هر ماتریس را با فرم کلی $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ نشان می‌دهند. (m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها)

• زیرنویس i و j در a_{ij} نشان‌دهنده‌ی به‌ترتیب شماره‌ی سطر و شماره‌ی ستون مربوط به این درایه هستند و به این صورت محل درایه را مشخص می‌کنند.

• گاهی اوقات درایه‌های یک ماتریس را به‌وسیله‌ی ضابطه‌ای روی i و j مشخص می‌کنند.

مثلاً $A = [i - ۲j]_{۲\times۳}$ عبارت است از: $\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۵ \\ ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}$

• دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ مساوی‌اند اگر مرتبه‌های آن‌ها یکسان باشد $(m = p \ , \ n = q)$ و درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر برابر باشند.

■ جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

• دو ماتریس هم‌مرتبه با یک‌دیگر قابل جمع یا تفریق کردن هستند. در این صورت مجموع یا تفاضل آن‌ها یک ماتریس هم‌مرتبه با آن‌هاست که هر درایه‌ی آن، حاصل‌جمع یا حاصل تفریق درایه‌های نظیر در آن دو ماتریس است: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$C = A \pm B = [C_{ij}]_{m \times n} \qquad \forall_{ij} : C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

• حاصل‌ضرب یک عدد در یک ماتریس، ماتریسی است هم‌مرتبه با آن به طوری که هر یک از درایه‌های آن از ضرب آن عدد در درایه‌ی نظیر در ماتریس اولیه به‌دست می‌آید.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت ضرب عدد در ماتریس یعنی ضرب عدد در تمام درایه‌های آن. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ $k \in \mathbb{R}$

• قرینه‌ی ماتریس A را حاصل‌ضرب عدد -۱ در ماتریس A تعریف می‌کنیم.

• ماتریس به مرتبه‌ی $m \times n$ که همه‌ی درایه‌های آن صفر است را ماتریس صفر می‌نامیم و با $O_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

■ ضرب ماتریس‌ها

• حاصل‌ضرب دو ماتریس ـ در صورت امکان ـ یک ماتریس است.

• دو ماتریس در صورتی قابل ضرب کردن در یک‌دیگر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول، برابر تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد.

• ضرب ماتریس‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$C = AB = [C_{ij}]_{m \times p} \qquad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

چند نکته در ضرب ماتریس‌ها:

$AB \ne BA$:در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد

$A(B + C) = AB + AC$

$AB + BC =$ نمی‌توان از B فاکتور گرفت

$AB + CB = (A + C)B$

$A(BC) = (AB)C$

۱ ـ از رابطه $\begin{bmatrix} ۲ & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ x \end{bmatrix} = ۵$ مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ و -۱ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ و ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ و ۱ ۴) $-\frac{۱}{۳}$ و -۱

۲ ـ اگر $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = A \times B = [C_{ij}]$ ، آن‌گاه درایه $C_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

---

۱. ۴

$$\begin{bmatrix} ۲ & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ + ۲x & -۲x + ۳x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ x \end{bmatrix}$$

$$= ۶ + ۶x - ۲x + ۳x^۲ = ۵ \Rightarrow ۳x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$$

$$x = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ - ۳}}{۳} = -۱ \text{ یا } -\frac{۱}{۳}$$

۲. ۳ با توجه به این‌که ماتریس C برابر حاصل‌ضرب ماتریس‌های $A \times B$ است درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم آن $(C_{۲۳})$ از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون سوم ماتریس B به دست می‌آید.

$$C_{۲۳} = ۵ \times ۴ + ۲ \times ۱ = ۲۲$$

■ ماتریس مربعی و چند تعریف

- وقتی تعداد سطرها و تعداد ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن را ماتریس مربعی می‌نامند.
- تعداد سطرها یا تعداد ستون‌های یک ماتریس مربعی را مرتبه‌ی آن ماتریس می‌گویند.
- در ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n، درایه‌های $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- در ماتریس مربعی A، اگر درایه‌های خارج از قطر اصلی برابر صفر باشند، A را ماتریس قطری می‌نامند.
- در ماتریس مربعی A، اگر درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند، A را ماتریس پایین‌مثلثی می‌نامند.
- در ماتریس مربعی A، اگر درایه‌های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند، A را ماتریس بالامثلثی می‌نامند.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلثی ـ ماتریس پایین‌مثلثی ـ ماتریس قطری

■ ماتریس همانی (I)

ماتریس همانی مرتبه‌ی n یعنی I_n ، یک ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر عدد یک می‌باشد.

قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n باشد، داریم:

$$AI_n = I_nA = A$$

(بنابراین ماتریس همانی را عضو خنثی در عمل ضرب می‌گویند.)

- در حالت کلی‌تر اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس غیرمربعی باشد، داریم:

$$AI_n = A \qquad , \qquad I_mA = A$$

- با توجه به این که هر ماتریس مربعی این قابلیت را دارد که در خودش ضرب شود، منظور از A^2 یعنی $A \times A$ و A^3 یعنی $A^2 \times A$ و الی آخر:

$$A^2 = A \times A \qquad , \qquad A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A \qquad A^n = A^{n-1} \times A$$

- چون ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرمربعی A و B یک ماتریس مربعی باشد، داریم: $(AB)^2 \neq A^2B^2$

۳ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟ [ر ـ ۸۳]

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۴ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟ [ر ۸۶]

۱) ۴ ۲) 2^{10} ۳) 2^{11} ۴) 2^{12}

۵ـ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ دوتایی (α, β) کدام است؟ [ر ـ ۸۴]

۱) $(11,2)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$

---

۳. **گزینه ۲** در این گونه موارد که توان‌های بزرگی از ماتریس A مطرح می‌شود، معمولاً با پیدا کردن A^2 و یا حداکثر A^3 ، به قاعده‌ای از توان‌های A می‌رسیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \times A = I \times A = A$$

خیلی روشن است که توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر A هستند. پس:

$$A^7 - A^4 = A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۴. **گزینه ۳**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب توان‌های بالاتر A را می‌توان نوشت. پس:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} برابر است با: $2^{10} + 2^{10} = 2^{11}$

۵. **گزینه ۴**

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ -2\alpha + \beta = 9 \Rightarrow \beta = 13 \end{cases}$$