

آفارد پبلشز

مقدماتی حساب و الجبر (فصل سوم)

ویژہی دانش آموزان
تجربہی و ریاضی

ریاضی

۴٪

تجربہی

۱۰٪

ویژہی کنکور

پدید آورندہ:

محسن محمد کریمی

انتشارات
علمی
فار

phare

www.pharepub.com

راهنمای آفاردئون:

- آفاردئون مقاطع مخروطی یک آموزش جمع و جور و خلاصه‌ای منسجم، هم‌راه با تست‌های کنکورهای سراسری ۶ سال اخیر (داخل و خارج کشور) است.
- در آفاردئون از چهارچوب کنکور بیرون نرفتیم و حرف اضافه نگفتیم!
- با دقت و وسواس زیاد تست‌ها و مفاهیم را مرتب کردیم تا شما بتوانید در کم‌ترین زمان ممکن جمع‌بندی کنید.
- همه‌ی تست‌های مربوط به مقاطع مخروطی رشته ریاضی در ۶ سال گذشته را آوردیم.
- هر جا که لازم بود تست‌های رشته‌ی تجربی ۶ سال اخیر یا تست‌های سال‌های قبل‌تر رشته‌های ریاضی و تجربی را هم آوردیم تا مفاهیم را بهتر و کامل‌تر پوشش دهیم.
- پاسخ‌ها را در پایین همان صفحه که تستش هست آورده‌ایم تا خدای نکرده از ورق زدن‌های زیاد سرتان از استوانه‌ای به هر می تغییر شکل ندهد!!
اما قبل از شروع باید با نمادها و کلیدواژه‌های آفاردئونی آشنا شوید:
آموزش اصلی قبل از تست‌ها قرار گرفته و یک دید کلی درباره‌ی مبحث به شما می‌دهد.

نکته: بلافاصله بعد از یک تست می‌آید و شما را با نکته‌ای که آن تست دارد آشنا می‌کند و سوال‌های مشابه را نیز با فارمکت گزارش داده‌ایم.
☞ جغد دانا که دقتش خیلی بالاست؛ هر جا دلش خواست می‌آید و حرفی و نکته‌ای و توصیه‌ای می‌گوید.

[] : داخل این گروه آدرس هر تست به اختصار داده شده؛

مثلاً [ت ۸۶خ] یعنی «تجربی ۸۶ خارج کشور» یا [ر ۹۱د] یعنی «ریاضی ۹۱ داخل کشور».

درصدی که بر **روی جلد** در بالا و پایین آمده‌اند، نشان‌دهنده‌ی درصد تست‌هایی است که از این آفاردئون به ترتیب در کنکور رشته‌ی تجربی و سپس ریاضی می‌آید.

جدول فراوانی تست‌های مبحث مقاطع مخروطی در ۶ سال گذشته :

سهم این مبحث در کنکور تجربی	تعداد تست‌های رشته‌ی تجربی	سهم این مبحث در کنکور ریاضی	تعداد تست‌های رشته‌ی ریاضی
۱۰ درصد	۳	۴ درصد	۲ یا ۳

توجه: دقت شود مطالبی که اختصاصاً مربوط به رشته‌ی ریاضی و یا رشته‌ی تجربی بوده است توسط عنوان و یا در صورت لزوم با یک پس زمینه متفاوت مشخص شده‌اند.

به هر حال این اولین چاپ آفاردئون مقاطع مخروطی است و با آن که خیلی دقت کرده‌ایم، احتمال هرگونه خطا و اشتباه وجود دارد. از شما توقع داریم، که اگر به چنین مواردی برخوردید، ما را نیز آگاه کنید.

شاد باشید و پیروز

محسن محمدکریمی



هندسه‌ی مختصاتی (یادآوری از ریاضیات پایه)

- معادله هر خط راست در دستگاه مختصات دو بعدی به صورت $ax + by + c = 0$ یا $y = mx + h$ است که در آن به عدد $-\frac{b}{a}$ یا m شیب (یا ضریب زاویه خط) می‌گویند.

■ تشکیل معادله خط:

- برای نوشتن معادله خط به شیب آن و مختصات یک نقطه روی آن نیازمندیم. معادله خطی که شیب آن برابر m است و از نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد عبارت است از:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} : B(x_2, y_2) \text{ و } A(x_1, y_1) \text{ از دو نقطه}$$

- با داشتن مختصات دو نقطه از خط می‌توان معادله آن را نوشت. به صورتی که معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ عبارت

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{است از:}$$

- دو خط موازی هستند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها برابر باشد ($m_1 = m_2$) و همچنین دو خط بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر باشد ($m_1 m_2 = -1$).

معادله خطی که با دو خط موازی $L_1 : ax + by + c = 0$ و $L_2 : ax + by + c' = 0$ موازی است و در وسط آن‌ها قرار دارد عبارت است از:

۱- یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است. معادله آن خط کدام است؟ [س - ۸۱]

$$2y + 3x = 4 \quad (1) \quad 2y + 3x = 1 \quad (2)$$

$$2y - 3x = -5 \quad (3) \quad 3y - 2x = -5 \quad (4)$$

■ فاصله یک نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط L به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابر رابطه فوق، فاصله نقطه تا خط در حالت‌های خاصی که خط افقی یا عمودی باشد، به صورت زیر به دست می‌آید:

۱) فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط عمودی $x = a$ برابر $|x_0 - a|$ است.

۲) فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط افقی $y = b$ برابر $|y_0 - b|$ است.

۲- دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟ [س - ۸۹]

$$11 \text{ و } 9 \quad (1) \quad -15 \text{ و } 11 \quad (2) \quad 15 \text{ و } -11 \quad (3) \quad -9 \text{ و } 11 \quad (4)$$

■ فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی برابر است با فاصله یک نقطه روی یکی از آن‌ها تا خط دیگر. بنابراین فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$

$$\text{برابر است با: } \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۳- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ [س ۹۲]

$$\frac{9}{8} \quad (1) \quad \frac{9}{4} \quad (2) \quad \frac{25}{8} \quad (3) \quad \frac{25}{4} \quad (4)$$

۱. شیب خط گذرنده از دو نقطه داده شده: $\frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

در نتیجه شیب خط عمود بر این خط برابر $-\frac{3}{2}$ است. پس:

$$-\frac{2k}{k+1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow k = 3$$

معادله خط مورد نظر: $3x + 2y - 1 = 0$

۲. مختصات هر نقطه روی خط $y = x - 1$ به صورت $(x_0, x_0 - 1)$ است. با توجه به رابطه فاصله نقطه تا خط داریم:

$$\frac{|2x_0 - 3(x_0 - 1) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow |-x_0 - 2| = 13$$

$$\Rightarrow x_0 + 2 = \pm 13 \Rightarrow x_0 = 11 \text{ یا } x_0 = -15$$

۳. از آن‌جا که دو خط داده شده موازی‌اند، پس دو ضلع روبه‌رو به هم در مربع می‌باشند. در نتیجه فاصله آن‌ها برابر ضلع مربع است.

$$x - y + 1 = 0, \quad x - y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{ضلع مربع} = \frac{|1 + \frac{3}{2}|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

■ نقطه وسط یک پاره خط

مختصات نقطه وسط یک پاره خط، میانگین مختصات دو سر آن است.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

■ دستگاه معادلات خطی

• به طور کلی هر معادله به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ که در آن a_1, a_2, \dots, a_n و b اعداد ثابت و x_1, x_2, \dots, x_n متغیر باشند، یک معادله خطی نامیده می‌شود.

به طور کلی یک دستگاه خطی مجموعه‌ای است از m معادله خطی و n مجهول.

• اگر دستگاه جواب نداشته باشد می‌گوییم ناسازگار است و اگر جواب داشته باشد آن را سازگار خوانیم. هر گاه $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ دستگاه را یک دستگاه همگن می‌گوییم.

• دو دستگاه را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه جواب‌های هر دو دستگاه یکسان باشند. یک دستگاه خطی ممکن است جواب منحصر به فرد داشته باشد یا جواب نداشته باشد یا بی‌نهایت جواب داشته باشد.

$$4 - \text{از دستگاه معادلات} \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = z-3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \text{ مقدار } y \text{ کدام است؟}$$

(1) 5- (2) 4- (3) 2 (4) 3 (س - 82)

5- به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ ، $2y + ax + 5 = 0$ و $y + 3x = a$ متقارب‌اند؟ (س - 88)

(1) -1 (2) 1 (3) 2 (4) نشدنی

6- اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = 2x + b$ و $y = ax^2 + bx - 3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول 1- متقاطع باشند a کدام است؟

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (س - 82)

7- معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $x = 1$ و $y = 2x$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟ (س - 84)

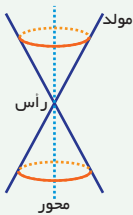
(1) $y = \frac{2}{3}$ (2) $x = \frac{2}{3}$ (3) $y + x = \frac{2}{3}$ (4) $y + x = \frac{1}{3}$

8- دستگاه معادلات $\frac{3x-y}{3} = \frac{5x+y}{1} = \frac{7x+y}{2} = \frac{x-3y}{5}$ ، چند دسته جواب دارد؟ (س - 87)

(1) یک (2) دو (3) فاقد جواب (4) بی‌شمار

تعریف مقاطع مخروطی

به فصل مشترک یک صفحه با یک رویه‌ی مخروطی، یک مقطع مخروطی می‌گویند. حالت‌های خاص مقاطع مخروطی:



(1) اگر صفحه‌ای عمود بر محور یک مقطع مخروطی آن را قطع کند - به طوری که از رأس آن نگذرد - مقطع حاصل دایره خواهد شد.

(2) اگر صفحه‌ای تمام مولدهای یک رویه‌ی مخروطی را در یک طرف رأس آن قطع کند - به طوری که عمود بر محور آن نباشد - مقطع حاصل بیضی خواهد شد.

4. \Rightarrow با استفاده از معادله اول، عبارت $x + y = 2z - 6$ را در معادله دوم جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{y+2}{3} = 2-3 \Rightarrow y = -5$$

5. \Rightarrow با توجه به معادله اول y را در دو معادله بعدی به صورت $y = -2x$ جایگزین می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} -2x + 3x = a &\Rightarrow x = a \\ -4x + ax + 5 = 0 &\Rightarrow x = \frac{5}{4-a} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{4-a} \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

چون معادله به دست آمده فاقد جواب است به ازای هیچ a سه خط داده شده نقطه مشترک ندارند.

6. \Rightarrow روشن است مختصات نقطه $(-1, 0)$ باید در دو معادله داده شده صدق کند.

$$0 = 2(-1) + b \Rightarrow b = 2$$

7. \Rightarrow با توجه به شکل مقابل ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع است. پس ارتفاع وارد بر آن کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است. پس خط مورد نظر، خطی است افقی که از نقطه A می‌گذرد. یعنی $y = \frac{2}{3}$.

8. \Rightarrow دستگاه داده شده در واقع مشتمل بر سه معادله خط است که به صورت زیر به دست می‌آیند و محل برخورد آن‌ها جواب دستگاه است.

$$\frac{3x-y}{3} = \frac{5x+y}{1} \Rightarrow 3x+y=0$$

$$\frac{5x+y}{1} = \frac{7x+y}{2} \Rightarrow 3x+y=0$$

$$\frac{7x+y}{2} = \frac{x-3y}{5} \Rightarrow 3x+y=0$$

چون خط‌های به دست آمده یکی هستند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.