آفاردئون

هندسه تحلیلی

بردار و خط و صفحه

(فصل اول و دوم)

ویژه‌ی دانش آموزان ریاضی

ریاضی

۵/۴٪

ویژه‌ی کنکور

پدیدآورنده:

محسن محمدکریمی

انتشارات علمی فار

phare

www.pharepub.com

به نام آن‌که موجودات را شکیل و جمیل آفرید

راهنمای آفاردئون:

- مجموعه‌ی آفاردئون یک آموزش جمع و جور و خلاصه‌ای منسجم، همراه با تست‌های کنکورهای سراسری ۶ سال اخیر (داخل و خارج کشور) است.
- در آفاردئون از چهارچوب کنکور بیرون نرفتیم و حرف اضافه نگفتیم!
- با دقت و وسواس زیاد تست‌ها و مفاهیم را مرتب کردیم تا شما بتوانید در کم‌ترین زمان ممکن جمع‌بندی کنید.
- همه‌ی تست‌های مربوط به رشته ریاضی در ۶ سال گذشته را آوردیم.
- هر جا که لازم بود تست‌های سال‌های قبل‌تر رشته‌های ریاضی و تجربی را هم آوردیم تا مفاهیم را به‌تر و کامل‌تر پوشش دهیم.
- پاسخ‌ها را در پایین همان صفحه که تستش هست آورده‌ایم تا خدای نکرده از ورق زدن‌های زیاد سرتان از استوانه‌ای به هرمی تغییر شکل ندهد!!

اما قبل ازشروع باید با نمادها و کلیدواژه‌های آفاردئونی آشنا شوید:

آموزش اصلی قبل از تست‌ها قرار گرفته و یک دید کلی درباره‌ی مبحث به شما می‌دهد.

فارمکث: بلافاصله بعد از یک تست می‌آید و شما را با نکته‌ای که آن تست دارد آشنا می‌کند و سوال‌های مشابه را نیز با فارمکث گزارش داده‌ایم.

: جغد دانا که دقتش خیلی بالاست؛ هرجا دلش خواست می‌آید و حرفی و نکته‌ای و توصیه‌ای می‌گوید.

[ ] : داخل این کروشه آدرس هر تست به اختصار داده شده؛ مثلا [ت۸۶خ] یعنی «تجربی ۸۶ خارج کشور» یا [ر۹۱د] یعنی «ریاضی ۹۱ داخل کشور».

درصدی که بر روی جلد در بالا و پایین آمده‌اند، نشان‌دهنده‌ی درصد تست‌هایی است که از این آفاردئون به ترتیب در کنکور رشته‌ی تجربی و سپس ریاضی می‌آید.

جدول فراوانی تست‌های مبحث بردار و خط و صفحه در ۶سال گذشته :

سهم این مبحث در کنکور ریاضی	تعداد تست‌های رشته‌ی ریاضی
۵/۴ درصد	۳

به هر حال این اولین چاپ آفاردئون‌های هندسه تحلیلی است و با آن که خیلی دقت کرده‌ایم، احتمال هرگونه خطا و اشتباه وجود دارد. از شما توقع داریم، که اگر به چنین مواردی برخوردید، ما را نیز آگاه کنید.

شاد باشید و پیروز

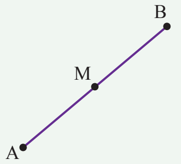
محسن محمد کریمی

انتشارات علمی فار
phare

انتشارات علمی فار
تلفن: ۶۶ ۵۹ ۷۹ ۹۹
www.PharePub.com
قیمت: ۴۰۰۰ تومان

بردارها

دستگاه مختصات سه بعدی $(\mathbb{R}^3)$



- اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ باشند:

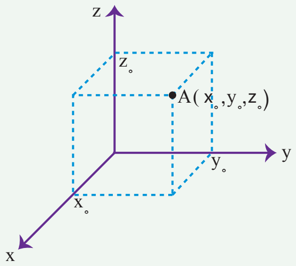
۱) مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB عبارت است

از: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$

۲) طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

- تصویر نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) روی هر یک از صفحات xy، xz، yz به ترتیب نقاط $(x_0,y_0,0)$ ، $(x_0,0,z_0)$ و $(0,y_0,z_0)$ است.



- تصویر نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) روی هر یک از محورهای طول‌ها (محور xها)، عرض‌ها (محور y ها) و ارتفاع‌ها (محور z ها) به ترتیب نقاط $(x_0,0,0)$، $(0,y_0,0)$ و $(0,0,Z_0)$ است.

- قرینه‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) نسبت به هر یک از صفحه‌های xy, xz, yz به ترتیب نقاط $(x_0,y_0,-z_0),(x_0,-y_0,z_0),(-x_0,y_0,z_0)$ است.

- قرینه‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) نسبت به هر یک از محورهای x ها، y ها و z ها به ترتیب نقاط $(x_0,-y_0,-z_0)$ و $(-x_0,y_0,-z_0)$ و $(-x_0,-y_0,z_0)$ است.

- فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) تا هر یک از صفحه‌های xy، xz و yz به ترتیب برابر $|z_0|$ ، $|y_0|$ و $|x_0|$ است.

- فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) تا هر یک از محورهای x ها؛ y ها و z ها به‌ترتیب برابر $\sqrt{y_0^2+z_0^2}$ ، $\sqrt{x_0^2+z_0^2}$ و $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ است.

بردار؛ پیکان و جمع و تفریق بردارها از لحاظ جبری

- به هر پاره‌خط جهت‌دار که نقطه ابتدای آن مبداء مختصات باشد، یک بردار می‌گوییم.

- در فضای $\mathbb{R}^3$ یک تناظر دو سویی بین بردارها و نقاط وجود دارد. به این معنی که هر نقطه مانند (x_0,y_0,z_0) نظیر برداری است که از مبداء مختصات به این نقطه وصل می‌شود. لذا این بردار را با (x_0,y_0,z_0) نیز نمایش می‌دهیم.

- طول بردار $a=(x_0,y_0,z_0)$ برابر است با: $|a|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$

- هر پاره‌خط جهت‌دار را یک پیکان می‌گوئیم. اگر A نقطه‌ی ابتدا و B نقطه‌ی انتهای پیکان باشد؛ آن را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم.

- پیکان‌های موازی و هم‌جهت و هم طول را هم ارز می‌گیریم، لذا پیکان $\overrightarrow{AB}$ با پیکانی که از مبدأ مختصات شروع می‌شود و موازی و هم‌جهت و هم طول با بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد، هم ارز است. پس اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ باشند، آن‌گاه پیکان $\overrightarrow{AB}$ را معادل بردار $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ در نظر می‌گیریم.

- حاصل جمع دو بردار و همچنین حاصل تفریق دو بردار یک بردار است. جمع جبری دو بردار و یا تفریق جبری دو بردار به این معنی است که با در اختیار داشتن مختصات دو بردار a و b، مختصات بردار حاصل جمع و یا مختصات بردار حاصل تفریق دو بردار a و b را تعیین کنیم و برای این منظور می‌بایست مؤلفه‌های دو بردار را نظیر به نظیر با یکدیگر جمع یا تفریق کنیم. دو بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ را در نظر بگیرید. جمع و تفریق جبری دو بردار به صورت زیر است: $a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

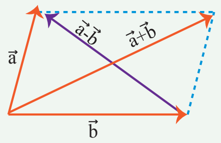
$a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ به صورت $a\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}$ و یا $a=a_1i+a_2j+a_3k$ نیز نمایش داده می‌شود.

جمع و تفریق بردارها به صورت هندسی

منظور از جمع یا تفریق دو بردار به صورت هندسی، این است که بدون در نظر گرفتن مختصات دو بردار a و b و صرفاً با در اختیار داشتن طول دو بردار و زاویه بین آن‌ها؛ طول و موقعیت بردار حاصل جمع و بردار حاصل تفریق را نسبت به آن‌ها تعیین کنیم.

■ روش متوازی الاضلاع:



در این روش ابتدای دو بردار را بر هم منطبق می‌کنیم و سپس توسط آن‌ها متوازی‌الاضلاعی را ایجاد می‌کنیم. قطری که از ابتدای دو بردار می‌گذرد بردار حاصل جمع است و قطر دیگر بردار حاصل تفریق.

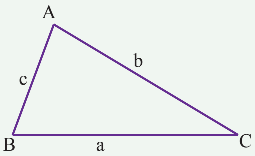
■ دو حالت خاص:

۱ـ اگر دو بردار بر هم عمود باشند؛ آن‌گاه بردارهای برآیند و تفاضل آن‌ها هم‌اندازه‌اند و بالعکس. (چرا که در این صورت متوازی الاضلاعی که توسط آن‌ها ساخته می‌شود یک مستطیل خواهد بود).

$$a \perp b \Leftrightarrow |a+b| = |a-b|$$

۲ـ اگر دو بردار هم‌اندازه باشند؛ آن‌گاه بردارهای برآیند و تفاضل آن‌ها بر هم عمودند و هر کدام نیم‌ساز زاویه‌ها هستند و بالعکس. (چرا که در این صورت متوازی الاضلاعی که توسط آن‌ها ساخته می‌شود یک لوزی خواهد بود). $|a| = |b| \Leftrightarrow (a+b) \perp (a-b)$

یادآوری از هندسه‌ی اقلیدسی (قضیه‌ی کسینوس‌ها):



در هر مثلث مربع هر ضلع، برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع، در کسینوس زاویه بین آن‌ها است. یعنی در شکل مقابل داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

■ طول بردار حاصل‌جمع و تفریق

با توجه به قضیه کسینوس‌ها اگر زاویه دو بردار a و b را θ در نظر بگیریم. طول بردار حاصل جمع و طول بردار حاصل تفریق بر حسب طول a و طول b از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

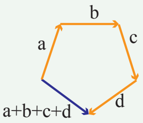
$$|a+b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta}$$

$$|a-b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta}$$

از دو رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت:

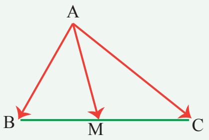
$$\begin{cases} |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \\ |a+b| \le |a| + |b| \quad , \quad |a-b| \le |a| + |b| \end{cases}$$

■ روش مثلث



برای پیدا کردن حاصل جمع دو بردار از لحاظ هندسی روش دیگری وجود دارد به نام روش مثلث و آن عبارت است از این که ابتدای یکی از بردارها را بر انتهای دیگری منطبق می‌کنیم. برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند همان بردار برآیند است. این روش برای جمع بیش از دو بردار نیز به همین صورت به‌کار می‌رود.

در مثلث ABC اگر وسط ضلع BC را M بنامیم؛ خواهیم داشت:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

در حالت کلی‌تر اگر $\frac{BM}{MC} = \lambda$ باشد، آنگاه:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$$

۱ـ اگر $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$ باشند؛ آن‌گاه زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟ [ت ۸۸]

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

۲ـ دو بردار a و b با تصویرهای $(1, \alpha+1, 2\alpha)$ و $(2, 0, -1)$ مفروض‌اند؛ به ازای کدام مقادیر α ؛ بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود برهم‌اند؟ [ر ـ ۸۹]

۱) ۰/۴ و ۱− ۲) ۰/۶ و ۱− ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱

ضرب عدد در بردار و بردارهای موازی

- حاصل ضرب عدد ـ ناصفر ـ در بردار؛ یک بردار است که با بردار اولیه موازی است.
- از لحاظ جبری حاصل ضرب عدد m در بردار a ؛ برداری است که هر یک از مؤلفه‌های آن، m برابر مؤلفه‌های بردار a است. در نتیجه اندازه آن $|m|$ برابر اندازه بردار a است. $a = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow ma = (ma_1, ma_2, ma_3)$

---

۱. ۲ با توجه به رابطه‌ی جمع هندسی دو بردار، اگر زاویه بین دو بردار را θ در نظر بگیریم، داریم: $|a+b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta}$

در این تست فرض کنیم $|a+b| = |a| = |b| = m$ باشد، در نتیجه:

$$m = \sqrt{m^2 + m^2 + 2m \times m \times \cos\theta}$$

$$\Rightarrow m^2 = 2m^2 + 2m^2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

۲. ۲ بردارهای $a+b$ و $a-b$ در صورتی برهم عمودند که اندازه‌های دو بردار a و b برابر باشند. پس:

$$\sqrt{(1)^2 + (\alpha+1)^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 = 4 + 1 \Rightarrow 5\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \text{ یا } \alpha = \frac{3}{5} = 0/6$$