فهرست

بخش آزمون‌های جامع

آزمون جامع ۱

۱۲۰ دقیقه

۱ ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر، درست است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد اول نسبت به جمع بسته است.
۲) مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به جمع بسته است.
۳) مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به جمع بسته است.
۴) گزینه‌های ۲ و ۳ درست است.

۲ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{۳}{x^۲-۱}>۱$ کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) $۱<|x|<۲$
۳) $|x|<۱$
۴) $|x|>۲$

۳ ـ اگر $\frac{b}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{a}{۲-\sqrt{۳}}=۱$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a=b=\frac{۱}{۴}$
۲) $a=-b=\frac{۱}{۴}$
۳) $a=-b=-\frac{۱}{۴}$
۴) $a=b=-\frac{۱}{۴}$

۴ ـ a و b دو عدد مثبت‌اند. برای آن‌که $\frac{\sqrt[۶]{a}}{\sqrt[۴]{b}}>۱$ باشد، لازم است داشته باشیم:

۱) $۲a>۳b$
۲) $a>b$
۳) $a^۳>b^۲$
۴) $a^۲>b^۳$

۵ ـ اگر $x>y$ باشد، کدام‌یک از نامساوی‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $x-۳>y-۲$
۲) $x-۲>y-۳$
۳) $۳x>۲y$
۴) $۲x>۳y$

۶ ـ معادله‌ی $x^۲-۴x+|۴x-x^۲|=۰$:

۱) دارای یک یا چند ریشه‌ی منفی است.
۲) دارای تعدادی ریشه در فاصله‌ی $-۴<x<۰$ است.
۳) دارای ریشه‌های بی‌شمار است.
۴) ریشه‌های نامحدود متعلق به فاصله‌ی $-\infty<x<\infty$ دارد.

۷ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $۲x-|x-۱|>۸$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۴)*

۱) $x>۷$
۲) $x>۹$
۳) $x<۱$ یا $x>۷$
۴) $x<۱$ یا $x>۹$

۸ ـ سطح بین منحنی $y=|x-۲|+|x-۱|$ و خط $y=x$ برابر است با: *(سراسری ـ ریاضی ـ ۷۷)*

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۹ ـ حاصل کسر $\frac{۰/\overline{۶۹۲}}{۰/\overline{۱}+۰/\overline{۲۳۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۹۲}{۳۳۵}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{۶۹۲}{۳۴۵}$

۱۰ ـ سطح محصور بین تابع $y=||x-۱|-x|$ و محور x ها و دو خط $x=۰$ و $x=۲$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۱۱ ـ در کدام‌یک از بازه‌های زیر نمودار $y=x^۲-۱$ بالای نمودار $y=|x-۱|$ قرار دارد؟

۱) $(-\infty,۱)$
۲) $(-\infty,-۱)$
۳) $(-۲,۱)$
۴) $(-\infty,-۲)$

۱۲ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-۱|+|x+۴|\geq ۷$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-۵,۲]$
۲) $\mathbb{R}-(-۵,۲)$
۳) $[-۵,۲]$
۴) $(-۵,۲)$

۱۳ ـ اگر $\{x \in \mathbb{R} : |۵x+a|<r\}$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی ۰/۲ و به شعاع ۰/۴ باشد، $a+r$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۱ ۴) −۱

۱۴ ـ اگر $A=\{x : |x-۲|<۱\}$ و $B=\left\{x : x^۲-۲x<۰\right\}$ و $A\cap B$ یک بازه‌ی متقارن باشد، نقطه‌ی میانی و شعاع آن به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱ , ۱

۱۵ ـ اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $||x-۲|-۵|>۳$ به‌صورت $(a,b)\cup(c,d)$ باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) −۸ ۳) ۱۶ ۴) −۱۶

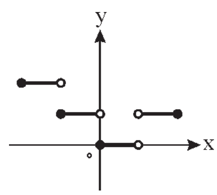
۱۶ ـ اگر $\frac{a}{b}=۰/۱\overline{۶}$ و $(a,b)=۱$ باشد، ab کدام است؟

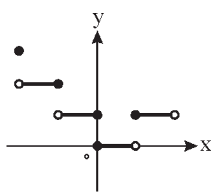
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

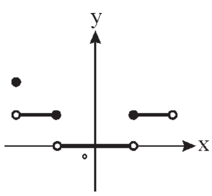
۱۷ ـ اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

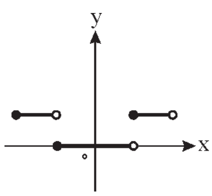
۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

۱۸ ـ کدام گزینه نمودار تابع $y=[|x|]$ در بازه‌ی $[-۲,۲)$ است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۹ ـ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیش‌ترین مقدار ممکن، زیرمجموعه‌ی $\left\{x : \left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|<۱\right\}$ است. a کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹ ـ خارج از کشور)*

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۲۰ ـ در همسایگی محذوف متقارن به‌صورت $(۳a-۷\,,\,a+۵)-\{۳\}$، شعاع همسایگی کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹ ـ داخل کشور)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون جامع ۲

۱۲۰ دقیقه

۱ ـ اگر a عددی گویا و مخالف صفر و b عددی گنگ باشد، کدام‌یک از حکم‌های زیر ممکن است صحیح نباشد؟

۱) $ab^۲$ عددی گویا است. ۲) ab عددی گنگ است.

۳) $a-b$ عددی گنگ است. ۴) $\frac{a}{b}$ عددی گنگ است.

۲ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x}-۱\le\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ کدام است؟

۱) $x\ge ۲$ ۲) $x\le ۲$ ۳) $۰\le x\le ۲$ ۴) $\varnothing$

۳ ـ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $x<y<۰$، آن‌گاه:

۱) $-\frac{۱}{x}<-\frac{۱}{y}$ ۲) $-x<-y$ ۳) $-x+y<۰$ ۴) $-\frac{۱}{y}<-\frac{۱}{x}$

۴ ـ اگر $E=xy+yz+zx$ و $x+y+z=۰$ باشد، همواره:

۱) $E>۰$ ۲) $E\ge ۰$ ۳) $E<۰$ ۴) $E\le ۰$

۵ ـ از دستگاه نامعادلات $\begin{cases} x+y>x \\ ۶-\frac{۱}{۲}y>\frac{۱}{۲}x \end{cases}$، حدود تغییرات x کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۷۱)*

۱) $x>۱۲$ ۲) $x>۶$ ۳) $x<۶$ ۴) $x<۱۲$

۶ ـ اگر تفاضل دو ریشه‌ی معادله‌ی $|x-۱|+|x+۱|=a$ برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۷ ـ مجموعه‌ی جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}|x|<۲\\(۲x-۱)<|x|\end{cases}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۸)*

۱) $\{x:-۱<x<۱\}$ ۲) $\{x:-۲<x<۲\}$ ۳) $\{x:۰<x<۲\}$ ۴) $\{x:-۲<x<۱\}$

۸ ـ اگر رابطه‌ی $|x+y+z|\le|x|+|y|+|z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیر صفر x و y و z چگونه‌اند؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۶)*

۱) مساوی هم ۲) هم علامت ۳) مثبت ۴) منفی

۹ ـ چند نقطه روی منحنی $y=|x+۲|$ وجود دارد که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی سه باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ ـ نمودار تابع $y=|x|-۴$، در بازه‌ی (a,b) بالاتر از خط به معادله‌ی $x+۲y=۵$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱ ـ اگر دو نامعادله‌ی $||x-۱|-۳|<۴$ و $|ax+b|<۳$ معادل باشند، $a-b$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۱۲ ـ برای آن‌که $|x|<\sqrt{x}$ باشد، لازم است که:

۱) $۰<x<۱$ ۲) $x>۱$ ۳) $x>۰$ ۴) $x>۱$ یا $x<-۱$

۱۳ ـ در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $y=\sqrt{۵-۴x-x^۲}$، در بالای نمودار تابع $y=|x-۳|+۲$، قرار دارد؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۳)*

۱) $(\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲},۵)$ ۲) $(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})$ ۳) $(۲,\frac{۴+\sqrt{۱۵}}{۲})$ ۴) $(۲,۲+\sqrt{۱۵})$

۱۴ ـ اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $||x-a|-a|<۴$ یک همسایگی محذوف متقارن باشد، مرکز و شعاع آن به‌ترتیب کدام است؟

۱) ۸ و ۸ ۲) ۴ و ۴ ۳) ۸ و ۴ ۴) ۴ و ۸

۱۵ ـ حاصل $۰/۸\bar{۹}\times۰/۷\bar{۸}$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۶۳ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۷۴ ۴) ۰/۷۱

۱۶ ـ کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $x\le y\Rightarrow[x]\le[y]$ ۲) $[x]\le[y]\Rightarrow x\le y$ ۳) $x\le y\Rightarrow|x|\le|y|$ ۴) $|x|\le|y|\Rightarrow x\le y$

۱۷ ـ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$، در بازه‌ی (a,b) پایین‌تر از خط به معادله‌ی $y=۲$ است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ∞

۱۸ ـ مجموعه‌ی $\{x\in\mathbb{R}:[|x|]=۰\}$ یک بازه‌ی با نقطه‌ی میانی .... و به شعاع .... است.

۱) یک ـ صفر ۲) صفر ـ یک ۳) یک ـ یک ۴) صفر ـ دو

۱۹ ـ اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $-۱\le a^۲+۵b^۲-۲ab-۴b<\frac{۱}{n}-۱$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۰ ـ اگر برای هر $\varepsilon>۰$ داشته باشیم؛ $۰\le\left[\frac{۶x+۲}{۲x}\right]<\varepsilon$، کدام درست است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}<x\le\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}<x\le-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}\le x<-\frac{۱}{۳}$

پاسخ آزمون جامع ۱

۱ ـ (۳) چشم‌انداز: می‌دانید بسته‌بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل، یعنی هر دو عضوی که از آن مجموعه در نظر بگیریم و آن عمل را بر روی آن دو عضو انجام دهیم، حاصل نیز عضو همان مجموعه باشد. برای رسیدن به جواب، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

(۱) می‌دانیم اعداد اول به غیر از عدد ۲ همگی اعدادی فرد هستند. هر دو عضو فردی که از این مجموعه در نظر بگیریم و با هم جمع کنیم حاصل عددی زوج می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی اعداد اول نسبت به عمل جمع بسته نیست.

(۲) اعداد $۲-\sqrt{۳}$ و $۳+\sqrt{۳}$ هر دو اعدادی گنگ هستند ولی جمع این دو عدد برابر ۵ می‌شود که عددی گویا است. پس اعداد گنگ نسبت به جمع بسته نیستند. *(همین حالا هم می‌توانید جواب تست را گزینه‌ی ۳ انتخاب کنید ولی ما گزینه‌ی ۳ را هم بررسی می‌کنیم!)*

(۳) دو عدد گویا مانند $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z},b,d\neq ۰)$ را در نظر می‌گیریم. جمع این دو عدد برابر است با $\frac{bc+ad}{bd}$ که عددی گویاست. پس مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به جمع بسته است.

۲ ـ (۲) پله‌ی یکم: برای حل ابتدا عدد ۱ را به طرف چپ نامساوی می‌بریم و آن را به نامساوی جدید تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۳}{x^۲-۱}>۱\Rightarrow\frac{۳}{x^۲-۱}-۱>۰\Rightarrow\frac{۳-x^۲+۱}{x^۲-۱}>۰\Rightarrow\frac{-x^۲+۴}{x^۲-۱}>۰$$

پله‌ی دوم: عبارت کسری به‌دست‌آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-۲		-۱		۱		۲	
$\frac{-x^۲+۴}{x^۲-۱}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

پله‌ی سوم: با توجه به جدول تعیین علامت، مجموعه‌ی جواب نامعادله به صورت $۱<x<۲$ و $-۲<x<-۱$ در می‌آید. این مجموعه‌ی جواب را می‌توان به‌صورت $۱<|x|<۲$ نمایش داد.

۳ ـ (۱) برای تعیین a و b ابتدا باید کسرهای موجود را گویا کنیم، سپس با توجه به این‌که طرف راست تساوی یک عدد گویا است ضریب اعداد گنگ باید صفر باشد.

پله‌ی یکم: ابتدا کسرهای موجود را گویا می‌کنیم:

$$\frac{a}{۲-\sqrt{۳}}+\frac{b}{۲+\sqrt{۳}}=۱\Rightarrow\frac{a}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{b}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{a(۲+\sqrt{۳})}{۴-۳}+\frac{b(۲-\sqrt{۳})}{۴-۳}=۱\Rightarrow a(۲+\sqrt{۳})+b(۲-\sqrt{۳})=۱$$

$$\Rightarrow ۲(a+b)+\sqrt{۳}(a-b)=۱$$

پله‌ی دوم: با توجه به تساوی موجود داریم:

$$\begin{cases}a-b=۰\\ a+b=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow a=b=\frac{۱}{۴}$$

۴ ـ (۴) اگر دو طرف یک نامساوی هر دو مثبت باشند، ما این حق را به خود می‌دهیم که هر دو طرف را بدون این‌که اشکالی در جهت نامساوی ایجاد کند، به توان یک عدد طبیعی مانند n برسانیم. در حل این تست هم از این حق!! استفاده می‌کنیم. *(حقوق شهروندی در هزاره‌ی سوم!)*

پله‌ی یکم: با توجه به رادیکال‌ها که دارای فرجه‌های متفاوتی هستند بهترین عددی که به جای n انتخاب می‌کنیم عددی است که ما را از شر هر دو رادیکال راحت کند. *(یعنی باید n کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌های این دو رادیکال باشد)* بنابراین بهترین n، عدد $n=۱۲$ است. داریم:

$$\frac{\sqrt[۶]{a}}{\sqrt[۴]{b}}>۱\xrightarrow{\text{به توان ۱۲}}\frac{a^۲}{b^۳}>۱$$

پله‌ی دوم: با توجه به نامساوی به‌دست‌آمده، می‌توان نامساوی $\mathbf{a^۲>b^۳}$ را به‌راحتی نتیجه گرفت.

۵ ـ (۲) چشم‌انداز: برای حل این تست باید گزینه‌های نادرست را با بیان یک مثال نقض از بین گزینه‌های تست حذف کنیم. حالا با همین شیوه تست را حل می‌کنیم.

(۱) فرض می‌کنیم $x=۵$ و $y=۴$ باشد. پس $x>y$ برقرار است. حالا رابطه‌ی $x-۳>y-۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$x-۳=۵-۳=۲\ ,\ \ y-۲=۴-۲=۲\Rightarrow x-۳\not>y-۲$$

پس این گزینه نادرست است.

(۲) $$\left.\begin{array}{l}x>y\\ -۲>-۳\end{array}\right\}\Rightarrow x+(-۲)>y+(-۳)\Rightarrow x-۲>y-۳$$

(۳) فرض می‌کنیم $x=-۴$ و $y=-۵$ باشد. پس $x>y$ است. آیا $۳x>۲y$ هم درست است. خیر. چون: $۳x=-۱۲$ و $۲y=-۱۰$ و $-۱۲ \not> -۱۰$ است.

(۴) اعداد $x=۵$ و $y=۴$ هم مثال نقض این گزینه هستند.

۶ ـ (۳) و (۴) باید در معادله‌ی داده‌شده به‌گونه‌ای جابه‌جایی ایجاد کنیم تا بتوانیم با استفاده از خواص قدرمطلق به جواب درست دست پیدا کنیم.

پله‌ی یکم: $x^۲-۴x+|۴x-x^۲|=۰ \Rightarrow |۴x-x^۲|=۴x-x^۲$

پله‌ی دوم: در چه صورتی $|a|=a$ است؟ در صورتی که a نامنفی باشد. از همین ویژگی قدرمطلق می‌فهمیم درصورتی‌که $۴x-x^۲ \geq ۰$ باشد، این معادله برقرار است. این رابطه *(سومی؛ همان* $۴x-x^۲ \geq ۰$*)* به‌ازای تمام اعداد حقیقی $۰ \leq x \leq ۴$ برقرار است. بنابراین معادله‌ی داده‌شده **دارای ریشه‌های بی‌شمار است**. پس گزینه‌های **۳** و **۴** درست هستند یعنی تست دو جواب صحیح دارد.

۷ ـ (۱) **چشم‌انداز:** ریشه‌ی داخل قدرمطلق، عدد $x=۱$ است. پس در دو محدوده‌ی $x \geq ۱$ و $x<۱$، نامعادله را حل می‌کنیم.

پله‌ی یکم: ابتدا برای $x \geq ۱$ داریم: $۲x-(x-۱)>۸ \Rightarrow ۲x-x+۱>۸ \Rightarrow x>۷$

اشتراک شرط اولیه و جواب برابر می‌شود با: $x>۷$

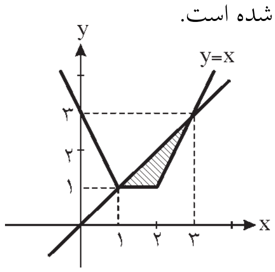
پله‌ی دوم: حالا برای $x<۱$ داریم: $۲x+(x-۱)>۸ \Rightarrow ۳x>۹ \Rightarrow x>۳$

شرط اولیه و جواب نامعادله با هم اشتراکی ندارند. پس در این قسمت جوابی نداریم.

پله‌ی سوم: اجتماع جواب‌های پله‌ی یکم و دوم، $x>۷$ است.

۸ ـ (۱) **چشم‌انداز:** بهترین روش برای حل این تست رسم نمودار منحنی $y=|x-۲|+|x-۱|$ و مشخص کردن مساحت بین نمودار این منحنی و خط $y=x$ از روی شکل ترسیم شده است.

پله‌ی یکم: رسم نمودار منحنی $y=|x-۲|+|x-۱|$ و تلاقی آن با خط $y=x$



پله‌ی دوم: سطح هاشورخورده در شکل همان مساحت خواسته‌شده است $S=\frac{۱}{۲}(۲\times۱)=\mathbf{۱}$.

۹ ـ (۲) **چشم‌انداز:** با استفاده از رابطه‌ی $۰/\overline{a_۱a_۲\cdots a_n}=\frac{a_۱a_۲\cdots a_n}{\underbrace{۹۹\cdots۹}_{n\text{ تا}}}$

حاصل کسر را به‌دست می‌آوریم:

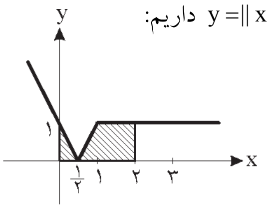
$$\frac{۰/\overline{۶۹۲}}{۰/\overline{۱}+۰/\overline{۲۳۵}}=\frac{\frac{۶۹۲}{۹۹۹}}{\frac{۱}{۹}+\frac{۲۳۵}{۹۹۹}}=\frac{\frac{۶۹۲}{۹۹۹}}{\frac{۱۱۱}{۹۹۹}+\frac{۲۳۵}{۹۹۹}}=\frac{\frac{۶۹۲}{۹۹۹}}{\frac{۳۴۶}{۹۹۹}}=\frac{۶۹۲}{۳۴۶}=\mathbf{۲}$$

۱۰ ـ (۳) **چشم‌انداز:** برای حل این تست هم، باید نمودار تابع $y=||x-۱|-x|$ را رسم کنیم و سپس مساحت محصور بین محور x ها و دو خط $x=۰$ و $x=۲$ را حساب کنیم.

پله‌ی یکم: برای رسم نمودار تابع $y=||x-۱|-x|$ داریم:

$x \geq ۱ \Rightarrow y=|x-۱-x|=|-۱|=۱$

$x<۱ \Rightarrow y=|-x+۱-x|=|-۲x+۱|$

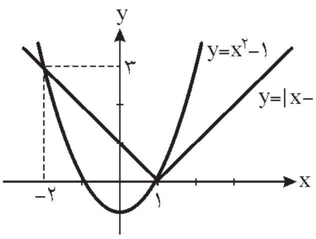


پله‌ی دوم: مساحت خواسته شده همان مساحت قسمت هاشورخورده است.

$S=(۱\times۱)+۲\times(\frac{۱}{۲}\times۱\times\frac{۱}{۲})=۱+\frac{۱}{۲}=\mathbf{\frac{۳}{۲}}$

۱۱ ـ (۴) برای تعیین بازه‌ی موردنظر باید بازه‌ای را که در آن نامعادله‌ی $x^۲-۱>|x-۱|$ برقرار است تعیین کنیم. *(وقتی نمودار* $f(x)$ *بالای* $g(x)$ *قرار می‌گیرد، یعنی* $f(x)>g(x)$ *است دیگر!)*

پله‌ی یکم: بهترین راه برای حل نامعادله‌ی $x^۲-۱>|x-۱|$ ترسیم نمودار دو تابع $y=x^۲-۱$ و $y=|x-۱|$ و مشخص کردن بازه‌ای است که در آن نامعادله‌ی $x^۲-۱>|x-۱|$ برقرار است.



نقاط تقاطع با استفاده از معادله‌ی زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} x=-x+۱ \\ y=x^۲-۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۱=-x+۱ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱\,,-۲$$

پله‌ی دوم: با توجه به بازه‌های داده‌شده در گزینه‌ها تنها در بازه‌ی $\mathbf{(-\infty,-۲)}$ است که نمودار $y=x^۲-۱$ بالای نمودار $y=|x-۱|$ قرار دارد.

۱۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم:**

$x<-۴ \Rightarrow -x+۱-x-۴ \geq ۷ \Rightarrow -۲x \geq ۱۰ \Rightarrow ۲x \leq -۱۰ \Rightarrow x \leq -۵$

با توجه به بازه‌ی اولیه‌ای که در نظر گرفته شده است جواب نامعادله در این بازه $x \leq -۵$ است.

$-۴ \leq x \leq ۱ \Rightarrow -x+۱+x+۴ \geq ۷ \Rightarrow ۵ \geq ۷$

به یک رابطه‌ی نادرست رسیدیم. پس نامعادله در این بازه فاقد جواب است.

$x>۱ \Rightarrow x-۱+x+۴ \geq ۷ \Rightarrow ۲x \geq ۴ \Rightarrow x \geq ۲$

با توجه به بازه‌ی اولیه، $x \geq ۲$ جواب نامعادله در این بازه است.

پله‌ی دوم: اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده مجموعه‌ی جواب نامعادله است. بنابراین مجموعه‌ی جواب نامعادله برابر است با:

$x \in (-\infty,-۵] \cup [۲,+\infty) = \mathbb{R}-\mathbf{(-۵,۲)}$

(سعی کنید با رسم شکل هم تست را حل کنید.)

۱۳ ـ (۳) **چشم‌انداز:** ابتدا بازه‌ی متقارن را مشخص می‌کنیم. سپس با مساوی قراردادن نقطه‌ی میانی بازه با ۰/۲ و شعاع همسایگی با ۰/۴، مقدار $a+r$ را تعیین می‌کنیم.

پله‌ی یکم: $|۵x+a|<r \Rightarrow |x+\frac{a}{۵}|<\frac{r}{۵}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه‌ی میانی} = -\frac{a}{۵} \Rightarrow -\frac{a}{۵} = ۰/۲ \Rightarrow a=-۱ \\ \text{شعاع} = \frac{r}{۵} \Rightarrow \frac{r}{۵}=۰/۴ \Rightarrow r=۲ \end{cases}$$

پله‌ی دوم: بنابراین مقدار $a+r$ برابر است با: $a+r=-۱+۲=\mathbf{۱}$

۱۴ ـ ۱ چشم‌انداز: برای تعیین نقطه‌ی میانی و شعاع مجموعه‌ی $A\cap B$ که به‌صورت یک بازه‌ی متقارن درنظر گرفته می‌شود، ابتدا دو مجموعه‌ی A و B را با محدوده‌ای که دارند مشخص می‌کنیم. بعد هم $A\cap B$ و مرکز و شعاع این مجموعه را مشخص می‌کنیم.

پله‌ی یکم: $A: |x-۲|<۱ \Rightarrow -۱<x-۲<۱ \Rightarrow ۱<x<۳ \Rightarrow A=(۱,۳)$

$B: x^۲-۲x<۰ \Rightarrow x(x-۲)<۰ \Rightarrow ۰<x<۲ \Rightarrow B=(۰,۲)$

$A\cap B=(۱,۳)\cap(۰,۲)=(۱,۲)$

پله‌ی دوم: حالا نقطه‌ی میانی و شعاع مجموعه‌ی $A\cap B=(۱,۲)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{مرکز همسایگی}=\frac{۱+۲}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{شعاع همسایگی}=\frac{۲-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

پس مرکز و شعاع به ترتیب برابر $\mathbf{\frac{۳}{۲}}$ و $\mathbf{\frac{۱}{۲}}$ هستند.

۱۵ ـ ۱ پله‌ی یکم: $||x-۲|-۵|<۳ \Rightarrow -۳<|x-۲|-۵<۳$

$\Rightarrow ۲<|x-۲|<۸$

نامعادله‌ی به‌دست‌آمده را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

(۱) $۲<x-۲<۸ \Rightarrow ۴<x<۱۰$

(۲) $۲<-(x-۲)<۸ \Rightarrow -۸<x-۲<-۲ \Rightarrow -۶<x<۰$

اجتماع بین مجموعه‌ی جواب نامعادلات (۱) و (۲)، مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی اصلی را مشخص می‌کند.

$(-۶,۰)\cup(۴,۱۰)=$ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی اصلی

پله‌ی دوم: باتوجه به‌مجموعه جواب به‌دست‌آمده a، b، c و d عبارت‌اند از:

$a=-۶ \,,\, b=۰ \,,\, c=۴ \,,\, d=۱۰$

در نتیجه: $a+b+c+d=-۶+۰+۴+۱۰=۸$

۱۶ ـ ۲ $۰/۱\overline{۶}=\frac{۱۶-۱}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}=\frac{a}{b} \Rightarrow a=۱ \,,\, b=۶$

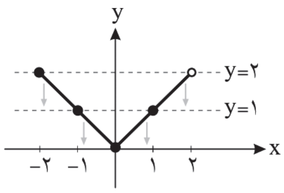
$\Rightarrow ab=\mathbf{۶}$

۱۷ ـ ۳ ضابطه‌ی $f(f(x))$ را به‌دست می‌آوریم:

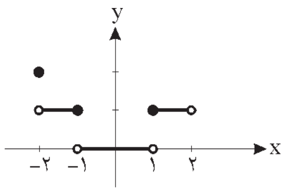
$$y=f(f(x))=f(۲-|x-۲|)=۲-|۲-|x-۲|-۲|$$
$$=۲-|-|x-۲||=۲-|x-۲| \Rightarrow f(f(x))=\mathbf{f(x)}$$

۱۸ ـ ۳ چشم‌انداز: برای ترسیم نمودار تابع $y=[|x|]$ در بازه‌ی $[-۲,۲)$ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را در این بازه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطوط $y=k(k\in\mathbb{Z})$ و تصویر کردن قسمت‌های بین دو خط، بر روی خط پایینی نمودار تابع $y=[|x|]$ را رسم می‌کنیم.

پله‌ی یکم: تابع $y=|x|$ در بازه‌ی $[-۲,۲)$، شکل زیر است:



پله‌ی دوم: نمودار تابع $y=[|x|]$ در بازه‌ی $[-۲,۲)$، شکل زیر است:



۱۹ ـ ۱ پله‌ی یکم:

$$\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|>۱ \Rightarrow |x-۳|>|۲x-۱| \Rightarrow x^۲-۶x+۹>۴x^۲-۴x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۸<۰ = -۲<x<\frac{۴}{۳} \xRightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}} -۲<x<\frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۲}<x<\frac{۴}{۳}$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم شعاع همسایگی با بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشیم. بنابراین بازه‌ی $\left(-۲,\frac{۱}{۲}\right)$ را درنظر می‌گیریم که مرکز آن $a=\frac{-۲+\frac{۱}{۲}}{۲}=-\mathbf{\frac{۳}{۴}}$ است.

۲۰ ـ ۴ پله‌ی یکم:

$$\text{مرکز}=\frac{\text{ابتدا}+\text{انتها}}{۲} \Rightarrow ۳=\frac{۳a-۷+a+۵}{۲}=\frac{۴a-۲}{۲} \Rightarrow a=۲$$

پله‌ی دوم: همسایگی محذوف متقارن به‌صورت $(-۱,۷)-\{۳\}$ درآمد. شعاع همسایگی برابر است با:

$$\text{مرکز}=\frac{\text{انتها}-\text{ابتدا}}{۲}=\frac{۷-(-۱)}{۲}=\frac{۸}{۲}=\mathbf{۴}$$

پاسخ آزمون جامع ۲

۱ ـ ۱ چشم‌انداز: برای رسیدن به حکمی که ممکن است صحیح نباشد باید تک‌تک حکم‌ها را بررسی کنیم و حکمی که ممکن است صحیح نباشد را با مثال نقض رد کنیم.

۱ همین گزینه ممکن است درست نباشد. با یک مثال نقض نادرستی حکم را نشان می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix} a=۱ \\ b=۲^{\frac{۱}{۴}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab^۲=۱\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

حاصل $ab^۲$ یک عدد گنگ شد. پس این حکم نادرست و همین گزینه جواب تست است.

حالا بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها! می‌دانیم حاصل‌ضرب یک عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، تفاضل یک عدد گویا و یک عدد گنگ و حاصل تقسیم یک عدد گویای غیرصفر بر یک عدد گنگ، همواره گنگ است. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ حکم‌هایی همواره درست هستند.

۲ ـ (۳) با توجه به این‌که $\sqrt{x}+1>0$ است، داریم:

$$\sqrt{x}-1\le \frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\le 1 \Rightarrow x-1\le 1 \Rightarrow x\le 2$$

هم‌چنین برای این‌که $\sqrt{x}$ تعریف شده باشد، $x\ge 0$ است. بنابراین $\mathbf{0\le x\le 2}$ است.

۳ ـ (۱) **چشم‌انداز:** راحت‌ترین، سریع‌ترین و کم‌خطرترین راه برای حل این‌گونه تست‌ها استفاده از دو عدد به جای x و y است. *(البته با توجه به شرایطی که برای x و y منظور شده است)*

پله‌ی یکم: x را برابر ۱ و y را برابر ۲ در نظر می‌گیریم:

(۱) $-\frac{1}{x}=-1\ ,\ -\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{x}<-\frac{1}{y}$ ✓

(۲) $-x=-1\ ,\ -y=-2\Rightarrow -x\not<-y$ ×

(۳) $-x=-1\ ,\ y=2\Rightarrow -x+y=1\not<0$ ×

(۴) $-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{x}=-1\Rightarrow -\frac{1}{y}\not<\frac{-1}{x}$ ×

پس به‌راحتی مشخص شد که تنها نامساوی صحیح، نامساوی $\mathbf{-\frac{1}{x}<-\frac{1}{y}}$ است.

(البته گزینه‌ی ۱ را می‌توان از خواص نامساوی‌ها به‌راحتی نتیجه گرفت‌ها!)

۴ ـ (۴) **چشم‌انداز:** سعی می‌کنیم با استفاده از رابطه‌ی $x+y+z=0$ به یک نامساوی بدیهی برای پیدا کردن $E=xy+xz+yz$ برسیم.

پله‌ی یکم: $x+y+z=0\Rightarrow (x+y+z)^2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=0$

پله‌ی دوم: می‌دانیم عبارت $x^2+y^2+z^2$ یک عبارت نامنفی است. اگر این عبارت نامنفی را با F نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$F+2E=0\Rightarrow E=-\frac{F}{2}\xrightarrow{F\ge 0}\mathbf{E\le 0}$$

۵ ـ (۴) **چشم‌انداز:** اول از همه سعی می‌کنیم حدود تغییرات y را به‌دست آوریم. سپس با مشخص بودن حدود تغییرات y، می‌توانیم حدود تغییرات x را هم مشخص کنیم.

پله‌ی یکم: با توجه به نامعادله‌ی اول داریم: $x+y>x\Rightarrow y>0$

پله‌ی دوم: با مشخص شدن حدود تغییرات y و با استفاده از نامعادله‌ی دوم، حدود تغییرات x را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} 6-\frac{1}{2}y>\frac{1}{2}x\xrightarrow{\times 2}12-y>x \\ y>0\xrightarrow{\times(-1)}-y<0\xrightarrow{+12}12-y<12\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{x<12}$$

۶ ـ (۳) **روش اول: چشم‌انداز:** برای تعیین تفاضل دو ریشه‌ی معادله باید x را در بازه‌های مختلف در نظر بگیریم. *(با توجه به ریشه‌ی عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها)* سپس مقدار هریک از ریشه‌ها را تعیین کنیم و در نهایت با دانستن مقدار اختلاف بین ریشه‌ها عدد a را حساب کنیم.

پله‌ی یکم: $x\ge 1\Rightarrow x-1+x+1=a\Rightarrow 2x=a\Rightarrow x=\frac{a}{2}$

$x=\frac{a}{2}$ با شرط $\frac{a}{2}\ge 1$ یک ریشه‌ی معادله است.

$-1<x<1\Rightarrow -x+1+x+1=a\Rightarrow a=2$

$x\le -1\Rightarrow -x+1-x-1=a\Rightarrow -2x=a\to x=-\frac{a}{2}$

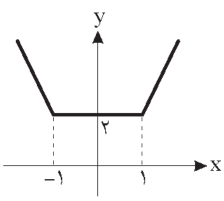
$x=-\frac{a}{2}$ با شرط $-\frac{a}{2}\le -1$ یک ریشه‌ی معادله است.

پله‌ی دوم: اختلاف دو ریشه‌ی معادله برابر ۶ است. پس داریم:

$x_1-x_2=\frac{a}{2}-(-\frac{a}{2})=6\Rightarrow \mathbf{a=6}$

که با شرط $a\ge 2$ مطابقت دارد.

روش دوم: نمودار تابع $y=|x-1|+|x+1|$ به‌صورت روبه‌رو است که یک تابع زوج محسوب می‌شود.



بنابراین طول نقاط برخورد آن با خط $y=a$ قرینه‌اند. پس اگر یکی از ریشه‌های آن x_0 باشد دیگری $-x_0$ است، چون تفاضل دو ریشه برابر ۶ است، داریم:

$x_0-(-x_0)=6\Rightarrow x_0=3$

با قراردادن مقدار $x_0=3$ در معادله داریم: $a=|3-1|+|3+1|=2+4=\mathbf{6}$

۷ ـ (۴) **چشم‌انداز:** ابتدا مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادله‌ها را حساب می‌کنیم. بعد بین مجموعه جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

پله‌ی یکم: $|x|<2\Rightarrow -2<x<2 \quad \text{I}$

$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0: x>2x-1\Rightarrow x<1\xrightarrow{\cap x\ge 0}0\le x<1\\ x<0:-x>2x-1\Rightarrow x<\frac{1}{3}\xrightarrow{\cap x<0}x<0\end{array}\right\}\xrightarrow{\cup} x<1 \quad \text{II}$$

پله‌ی دوم: با اشتراک‌گیری بین I و II مجموعه‌ی جواب دستگاه نامعادلات به‌دست می‌آید: $\text{I}\cap\text{II}=\mathbf{\{x:-2<x<1\}}$

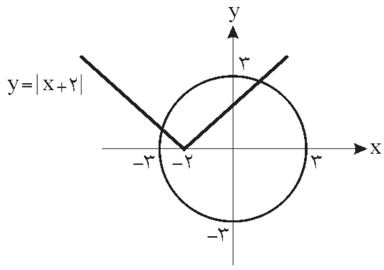
۸ ـ (۲) از خواص قدرمطلق می‌دانیم که رابطه‌ی $|x+y|\le|x|+|y|$ وقتی به رابطه‌ی تساوی تبدیل می‌شود که x و y هم‌علامت یا صفر باشند. این موضوع را می‌توانیم به تعداد بیش‌تری قدرمطلق هم تعمیم دهیم، یعنی در این‌جا هم وقتی رابطه‌ی داده شده به‌تساوی تبدیل می‌شود که هر سه عدد **x و y و z هم علامت** یا صفر باشند. *(گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ را با مثال نقض هم می‌توانستید رد کنید.)*

۹ ـ (۳) **روش اول: پله‌ی یکم:** نقطه‌ای که روی منحنی $y=|x+2|$ قرار دارد را $A(\alpha,|\alpha+2|)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ است. تعداد جواب‌هایی که برای α به‌دست می‌آید همان تعداد نقاطی است که فاصله‌ی آن‌ها از مبدأ مختصات برابر ۳ است. پس داریم: $\sqrt{\alpha^2+(\alpha+2)^2}=3\Rightarrow\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+4\alpha+4}=3$

$\Rightarrow 2\alpha^2+4\alpha+4=9\Rightarrow 2\alpha^2+4\alpha-5=0$

با توجه به این‌که معادله‌ی به‌دست‌آمده دارای ۲ ریشه است، بنابراین تعداد نقاطی هم که فاصله‌ی آن‌ها از مبدأ مختصات برابر ۳ است، برابر **۲ نقطه** می‌باشد.

روش دوم: می‌توان نمودار $y=|x+۲|$ را با دایره‌ای به مرکز (۰,۰) و به شعاع ۳ قطع داد:



با توجه به شکل، **دو نقطه** روی منحنی وجود دارد که فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات برابر ۳ باشد.

۱۰ ـ (۲) **چشم‌انداز:** با حل نامعادله‌ی $\frac{۵-x}{۲}<|x|-۴$ می‌توانیم بازه‌ای را که در آن تابع $y=|x|-۴$ بالاتر از خط $۲y+x=۵$ قراردارد بیابیم.

پله‌ی یکم: $x\ge ۰ \Rightarrow ۴-x>\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow ۸-۲x>۵-x \Rightarrow x<۳$

با توجه به شرط اولیه، جواب این قسمت بازه‌ی $[۰,۳)$ است.

$x<۰ \Rightarrow ۴+x>\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow ۸+۲x>۵-x \Rightarrow x>-۱$

با توجه به شرط اولیه، جواب این قسمت $(-۱,۰)$ است.

جواب نهایی، اجتماع جواب‌هاست: $(-۱,۰)\cup[۰,۳)=(-۱,۳)$

پله‌ی دوم: مجموعه‌ی جواب نامعادله به‌صورت $x\in(-۱,۳)$ در می‌آید.

با در نظر گرفتن $b=۳$ و $a=-۱$ بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با:

$b-a=۳-(-۱)=۳+۱=\mathbf{۴}$

۱۱ ـ (۴) **چشم‌انداز:** دو نامعادله را به یک صورت تبدیل کرده و با مقایسه‌ی آن‌ها مقدار a و b را به دست می‌آوریم:

پله‌ی یکم: $||x-۱|-۳|<۴ \Rightarrow -۴<|x-۱|-۳<۴ \Rightarrow -۱<|x-۱|<۷$

$\xRightarrow{|x-۱|\ge ۰} |x-۱|<۷$

پله‌ی دوم: $|ax+b|<۳ \overset{a>۰}{\Rightarrow} \left|x+\frac{b}{a}\right|<\frac{۳}{a} \xRightarrow{|x-۱|<۷}$

پله‌ی سوم: با مقایسه دو نامعادله داریم:

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=-۱\\ \frac{۳}{a}=۷\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{۳}{۷}\\ b=-\frac{۳}{۷}\end{cases} \Rightarrow a-b=\mathbf{\frac{۶}{۷}}$$

۱۲ ـ (۲) **چشم‌انداز:** می‌دانیم اگر دو طرف یک نامساوی مثبت باشند می‌توانیم دو طرف آن را به‌توان ۲ برسانیم.

دو طرف نامساوی را با این شرط که $x\ge ۰$ است، به توان ۲ می‌رسانیم:

$|x|>\sqrt{x} \Rightarrow x^۲>x \Rightarrow x^۲-x>۰ \Rightarrow x(x-۱)>۰ \xRightarrow{x\ge ۰} \mathbf{x>۱}$

۱۳ ـ (۳) **چشم‌انداز:** باید نامعادله‌ی $۲+|x-۳|<\sqrt{۵+۴x-x^۲}$ را حل کنیم.

پله‌ی یکم: چون دو طرف نامساوی مثبت است می‌توانیم آن را به توان ۲ برسانیم.

$۵+۴x-x^۲>x^۲-۶x+۹+۴+۴|x-۳|$

$\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x+۸+۴|x-۳|<۰$

پله‌ی دوم: $x\ge ۳: ۲x^۲-۱۰x+۸+۴x-۱۲<۰$

$\Rightarrow ۲x^۲-۶x-۴<۰ \Rightarrow \frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$

$\xRightarrow{x\ge ۳} ۳\le x<\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \qquad (I)$

همین‌جا با کمی تیزهوشی می‌توانید بفهمید که جواب گزینه‌ی ۲ است.

$x\le ۳: ۲x^۲-۱۰x+۸-۴x+۱۲<۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۴x+۲۰<۰$

$\Rightarrow x^۲-۷x+۱۰<۰ \Rightarrow ۲<x<۵ \xRightarrow{x\le ۳} ۲<x\le ۳ \qquad (II)$

پله‌ی سوم: $(I)\cup(II) \Rightarrow x\in \mathbf{\left(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}\right)}$

۱۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** ابتدا نامعادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$||x-a|-a|<۴ \Rightarrow -۴<|x-a|-a<۴ \Rightarrow a-۴<|x-a|<a+۴$

پله‌ی دوم: می‌دانیم همسایگی محذوف متقارن به صورت $۰<|x-a|<r$ است. بنابراین $a-۴=۰$ و در نتیجه $a=۴$ است. چون مرکز همسایگی a و شعاع آن $a+۴$ است، پس مرکز وشعاع همسایگی به ترتیب **۴ و ۸** است.

۱۵ ـ (۴) اعداد اعشاری متناوب را به اعداد کسری تبدیل می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}۰/۸\overline{۹}&=\frac{۸۹-۸}{۹۰}=\frac{۸۱}{۹۰}=\frac{۹}{۱۰}\\ ۰/۷\overline{۸}&=\frac{۷۸-۷}{۹۰}=\frac{۷۱}{۹۰}\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow ۰/۸\overline{۹}\times ۰/۷\overline{۸}=\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۷۱}{۹۰}=\frac{۷۱}{۱۰۰}=\mathbf{۰/۷۱}$

۱۶ ـ (۱) **چشم‌انداز:** گزینه‌ها را برای یافتن گزینه‌ی همواره درست! بررسی می‌کنیم.

(۱) این گزینه همان گزینه‌ای است که همواره درست است. چون اگر $x\le y$ باشد و تفاوت x و y فقط در جزء اعشاری آن‌ها باشد، در این‌صورت $[x]=[y]$ است. ولی اگر تفاوت x و y در جزء صحیح آن‌ها باشد $[x]<[y]$ خواهد بود. بنابراین گزینه‌ی ۱ همواره درست است.

پله‌ی دوم: رد سایر گزینه‌ها با استفاده از مثال نقض.

(۲) $x=۲/۳ \;,\; y=۲/۱ \Rightarrow [x]=[y]=۲ \;,\; x\nleq y$

با این‌که $[x]=[y]$ است ولی $x\le y$ برقرار نیست.

(۳) $x=-۳ \;,\; y=-۲ \Rightarrow x\le y$

با این‌که $x\le y$ است ولی $|x|\le|y|$ برقرار نیست.

(۴) $x=۲ \;,\; y=-۳ \Rightarrow |x|\le|y|$

با این‌که $|x|\le|y|$ است ولی رابطه‌ی $x\le y$ برقرار نیست.

۱۷ ـ (۲) تابع $f(x)$ در صورتی پایین‌تر از خط $y=2$ قرار می‌گیرد که داشته باشیم:

$$f(x)<2 \Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2 \Rightarrow 2-\frac{3x^2-2x}{x^2+4}>0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+8}{x^2+4}>0$$

$$\xrightarrow{x^2+4>0} -x^2+2x+8>0 \Rightarrow x^2-2x-8<0 \Rightarrow (x-4)(x+2)<0$$

$$\Rightarrow x\in(-2,4) \Rightarrow (a,b)=(-2,4) \Rightarrow b-a=6$$

۱۸ ـ (۲) **چشم‌انداز:** با تعیین محدوده‌ای که به ازای آن رابطه‌ی $[|x|]=0$ برقرار است و تبدیل آن به یک همسایگی، مرکز و شعاع همسایگی را به دست می‌آوریم.

پله‌ی یکم: $[|x|]=0 \Rightarrow \{0\le|x|<1\}$

پله‌ی دوم: مجموعه‌ی به‌دست‌آمده یک بازه‌ی **متقارن به** مرکز **صفر** و با شعاع **یک** است.

۱۹ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** برای ساده کردن نامعادله‌ی داده شده، طرفین نامعادله را با عدد یک جمع می‌کنیم:

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0\le a^2+5b^2-2ab-4b+1<\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-2ab+4b^2-4b+1=0 \Rightarrow (a-b)^2+(2b-1)^2=0$$

جمع دو عبارت نامنفی وقتی برابر صفر است که هر دو عبارت برابر صفر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} a-b=0\Rightarrow a=b \\ 2b-1=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

پله‌ی دوم: $a+b$ برابر است با: $a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

۲۰ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** درصورتی رابطه‌ی $\forall\varepsilon>0: 0\le[\frac{6x+2}{2x}]<\varepsilon$ برقرار است که داشته باشیم $[\frac{6x+2}{2x}]=0$. بنابراین داریم:

$$[\frac{6x+2}{2x}]=0 \Rightarrow [3+\frac{1}{x}]=0 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=-3$$

پله‌ی دوم: مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[\frac{1}{x}]=-3$ جواب تست است:

$$-3\le\frac{1}{x}<-2 \Rightarrow \mathbf{-\frac{1}{2}<x\le-\frac{1}{3}}$$

(چون طرفین نامساوی منفی بود در معکوس کردن آن جهت عوض می‌شود.)