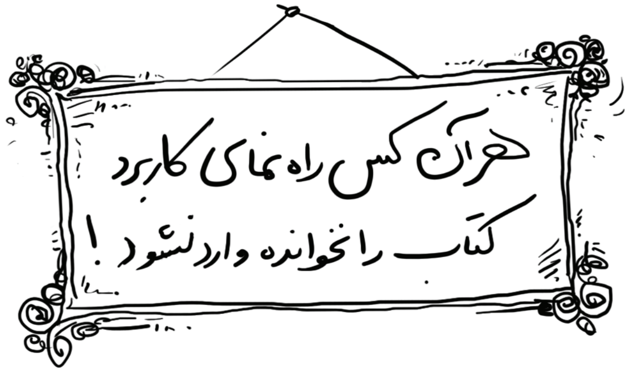


فهرست

فصل ۱: کاربرد مشتق ۱

- **بخش ۱:** ریشه‌ی مضاعف معادله ... ۲
- **بخش ۲:** تابع اکیداً یکنوا ـ تابع یکنوا ۱۶
- **بخش ۳:** نقطه‌ی بحرانی و اکسترمم نسبی و ... ۲۴
- **بخش ۴:** جهت تقعر و نقطه‌ی عطف ۴۵
- **بخش ۵:** قضیه‌ی رُل و قضیه‌ی مقدار میانگین ۵۶
- **بخش ۶:** توابع درجه‌ی دو، درجه‌ی سه و هموگرافیک ۶۴
- **بخش ۷:** بررسی نمودار تابع ۸۰
- **بخش ۸:** روش‌های تقریبی حل معادله ۱۰۲
- **بخش ۹:** آهنگ تغییر و کمیت‌های وابسته ۱۰۹
- **بخش ۱۰:** دیفرانسیل ـ خطی‌سازی و خطا ۱۱۵
- **بخش ۱۱:** بهینه‌سازی ۱۲۴
- آزمون‌های جامع ۱۳۷

فصل ۲: انتگرال ۱۷۱

- **بخش ۱:** انتگرال نامعین ۱۷۲
- **بخش ۲:** تغییر متغیر ۱۷۹
- **بخش ۳:** انتگرال معین و مساحت ۱۸۶
- آزمون‌های جامع ۲۱۷

۹ ـ بیش‌ترین مقدار تابع $y = (۱۳ - \cos x)(۱ + \cos x)$ برابر است با: *(آزاد ـ ریاضی ـ ۶۶)*

۱) ۲۴　　۲) ۱۳　　۳) ۴۹　　۴) ۲۸

۱۰ ـ مجموعه‌ی تمام مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۶ است را در نظر می‌گیریم. مینیمم طول اقطار این مستطیل‌ها کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۶۹)*

۱) $۳\sqrt{۲}$　　۲) $۴\sqrt{۲}$　　۳) $۴\sqrt{۳}$　　۴) ۶

آزمون ۳

۱۶ دقیقه

۱ ـ رابطه‌ی بین r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه به‌صورت $r + h = ۱۵$ است. شعاع قاعده چه‌قدر اختیار شود تا سطح جانبی استوانه ماکسیمم گردد؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۶۸)*

۱) ۷/۵　　۲) ۸　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۲ ـ بیش‌ترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور کرد چند متر مربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.) *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۸)*

۱) ۲۴۴　　۲) ۲۸۸　　۳) ۲۹۶　　۴) ۳۱۶

۳ ـ اگر $a \times b = ۱۰$ باشد، ماکسیمم $\log a \times \log b$ برابر است با: *(سراسری ـ ریاضی ـ ۵۱)*

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) ۱

۴ ـ ماکسیمم عبارت $A = (۳ - ۲\sin x)(۵ + ۲\sin x)$ برابر است با: *(آزاد ـ تجربی ـ ۷۶)*

۱) ۱۴　　۲) ۱۸　　۳) ۷　　۴) ۱۶

۵ ـ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که در درون دایره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد، کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۶)*

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۶ ـ ماکسیمم محیط از مستطیل‌هایی که یک ضلع آن منطبق بر محور xها و دو رأس آن بر روی منحنی تابع $y = ۶ - x^۲$ قرار دارند، کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۷۷)*

۱) ۱۱　　۲) ۱۲

۳) ۱۳　　۴) ۱۴

۷ ـ x و y دو عدد حقیقی‌اند و در رابطه‌ی $\frac{x^۲}{۴} + y^۲ = ۱$ صادق هستند، اگر عبارت xy ماکسیمم باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۶۵)*

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۸ ـ کوتاه‌ترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از منحنی به معادله‌ی $y^۲ = -۲x + ۴$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۷۳)*

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) $\sqrt{۳}$

۹ ـ مختصات نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی $\frac{(x - ۳)^۲}{۴} + y^۲ = ۱$ تا مبدأ مختصات کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $(۲, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$　　۲) $(۳, ۱)$　　۳) $(۰, ۱)$　　۴) $(۱, ۰)$

۱۰ ـ اگر h ارتفاع و L طول قاعده‌ی مثلث و $h + ۲L = ۷$ باشد، بیش‌ترین مقدار برای مساحت این مثلث‌ها کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۵)*

۱) $\frac{۴۹}{۱۶}$　　۲) $\frac{۵۰}{۱۶}$　　۳) $\frac{۵۱}{۱۶}$　　۴) $\frac{۵۲}{۱۶}$

آزمون ۴

۱۶ دقیقه

۱ ـ اگر $x + y = a$ باشد، حداکثر عبارت $۲y^۲ - ۴x^۲$ کدام است؟

۱) $۴a^۲$　　۲) $۳a^۲$　　۳) $۲a^۲$　　۴) $a^۲$

۲ ـ پاره‌خط AB به‌طول ۶ را به دو قسمت به طول‌های x و y تقسیم می‌کنیم. ماکسیمم $xy^۲$ چیست؟

۱) ۱۲　　۲) ۲۴　　۳) ۳۲　　۴) ۳۶

۳ ـ کم‌ترین فاصله‌ی نقاط منحنی $y=\sqrt{x}$ از نقطه‌ی $(1,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

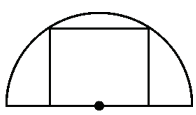
۴ ـ مساحت جانبی مخروط دواری $16\sqrt{3}\pi$ است. شعاع قاعده‌ی آن چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکسیمم شود؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$

۵ ـ نقاط $A(2,2)$ و $B(4,4)$ مفروض‌اند. نقطه‌ی M با کدام طول روی محور x ها انتخاب شود تا $MA+MB$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۶ ـ ماکسیمم مساحت مستطیلی که مطابق شکل درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده باشد، کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷ ـ اگر اندازه‌ی وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۱۰ باشد، ماکسیمم اندازه ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{10}$ ۳) ۵ ۴) $2\sqrt{5}$

۸ ـ اگر x و y دو عدد مثبت و $xy=6$ باشد، مینیمم عبارت $3x+2y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۹ ـ در مکعب مستطیلی با قاعده مربع، مجموع طول و عرض و ارتفاع ۱۲ است. ارتفاع آن چه‌قدر باشد تا سطح کل آن ماکسیمم گردد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۰ ـ اگر مخروطی را در کره‌ای به شعاع ۶ محاط کنیم به ازای کدام مقدار ارتفاع، حجم مخروط ماکسیمم می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{16}{3}$

آزمون ۵

۱۶ دقیقه

۱ ـ حاصل‌ضرب دو عدد مثبت x و y برابر ۱۶ است. حداقل مقدار x^2+y کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲ ـ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2\sqrt{2}$ است. اگر محیط آن ماکسیمم باشد، مقدار مساحت آن چیست؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۳ ـ کم‌ترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقاط منحنی $xy^2=54$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۶

۴ ـ نقاط A و B به‌طول‌های ۱ و ۴ روی محور طول‌ها واقع‌اند. نقطه‌ی M روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول چنان قرار دارد که مجموع مربعات فواصل نقطه‌ی M از نقاط A و B مینیمم است. طول نقطه‌ی M کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۵ ـ اگر x و y دو مقدار مثبت که $3x+y=20$ است و عبارت x^2+y^2 مینیمم باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

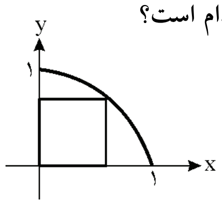
۶ ـ مجموع شعاع قاعده و ارتفاع استوانه‌ای ۳ است. ماکسیمم حجم آن چیست؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) $\frac{9}{4}\pi$ ۴) $\frac{27}{8}\pi$

۷ ـ جعبه‌ای مکعب مستطیل بدون در با قاعده‌ی مربع، دارای سطح کل $12cm^2$ است. ارتفاع آن چند سانتی‌متر باشد تا حجم آن ماکسیمم شود؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۸ ـ درون ربع دایره‌ای به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ $(x,y > ۰)$ مستطیلی مطابق شکل محاط می‌کنیم. ماکسیمم محیط مستطیل کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۱

۴) ۲

۹ ـ خط $y = mx + (۱ - m)$ به‌ازای مقادیر m، محور طول‌ها را در نقطه‌ی A سمت راست مبدأ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ی B بالای مبدأ قطع می‌کند. به ازای کدام مقدار m، مساحت مثلث OAB مینیمم می‌شود؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۱۰ ـ سیمی به‌طول l به شکل مستطیل با ماکسیمم مساحت درآمده است. بیش‌ترین مقدار مساحت کدام است؟

۱) $\frac{l^۲}{۴}$ ۲) $\frac{l^۲}{۸}$ ۳) $\frac{l^۲}{۱۶}$ ۴) $\frac{l^۲}{۶۴}$

فهرست
بخش ۱۱ ۱۲۴
پاسخ‌های بخش ۱۱ ۱۲۹

پاسخ‌های بخش ۱۱

پاسخ آزمون ۱

۱ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** دو قسمتی که عدد ۳۶ را به آن تقسیم می‌کنیم x و y در نظر می‌گیریم. بنابراین $x+y=۳۶$ است. x و y را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که حاصل‌ضرب xy دارای بیش‌ترین مقدار خود باشد.

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن حاصل‌ضرب xy به‌جای y عبارت $۳۶-x$ را قرار می‌دهیم. به یک تابع تک متغیره می‌رسیم. در این حالت از تابع مشتق گرفته و نقطه‌ی max آن را تعیین می‌کنیم:

$$S = xy = x(۳۶-x) = ۳۶x - x^{۲}$$

$$S' = ۳۶ - ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۸ \xRightarrow{y=۳۶-x} y = ۳۶ - ۱۸ = ۱۸$$

بنابراین آن دو قسمت **۱۸ و ۱۸** است.

(سومی: در حالتی‌که حاصل جمع دو عدد مقدار ثابتی است، بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب دو عدد زمانی رخ می‌دهد که دو عدد با هم برابر باشند.)

۲ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ابتدا عبارت xy را به یک تابع تک متغیره تبدیل می‌کنیم:

$$S = xy \xRightarrow{y=a-۲x} S = x(a-۲x) = ax - ۲x^{۲}$$

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن نقطه‌ای که در آن تابع دارای بیش‌ترین مقدار خود است از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا متغیر x و به‌دنبال آن متغیر y را تعیین کنیم.

$$S' = a - ۴x = ۰ \Rightarrow ۴x = a \Rightarrow x = \frac{a}{۴}$$

$$۲x + y = a \xRightarrow{x=\frac{a}{۴}} \frac{a}{۲} + y = a \Rightarrow y = \frac{a}{۲}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار xy برابر است با: $x.y = \frac{a}{۴}(\frac{a}{۲}) = \frac{\mathbf{a^{۲}}}{\mathbf{۸}}$

(سومی: $۲x+y$ دارای مقدار ثابت a است. بیش‌ترین مقدار xy زمانی رخ می‌دهد که $۲x = y = \frac{a}{۲}$ باشد. پس $x = \frac{a}{۴}$ و $y = \frac{a}{۲}$ و $xy = \frac{\mathbf{a^{۲}}}{\mathbf{۸}}$ است.)

۳ ـ (۲) در این تست چون $x+y=۱۲$ است، بیش‌ترین مقدار xy وقتی حاصل می‌شود که $x=y=۶$ باشد، بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}(۶\times۶) = \mathbf{۱۸}$$

۴ ـ (۱) **روش اول:** $x+x+h=L$ است *(سومی: طول و عرض قاعده که مربع هستند را برابر x و ارتفاع را برابر h فرض می‌کنیم)*

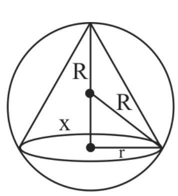
$$V = x^{۲}h \xRightarrow{h=L-۲x} V = x^{۲}(L-۲x) \quad \text{حجم مکعب}$$

$$= x^{۲}L - ۲x^{۳} \Rightarrow V'_x = ۲xL - ۶x^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x(L-۳x) = ۰ \Rightarrow ۳x = L \Rightarrow x = \frac{L}{۳} \xRightarrow{h=L-۲x} \mathbf{h = \frac{L}{۳}}$$

روش دوم: اگر مجموع سه متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکسیمم است که برابر باشند. چون مجموع طول و عرض و ارتفاع مکعب دارای مقدار ثابت L است، بنابراین بیش‌ترین حجم مکعب زمانی رخ می‌دهد که حاصل‌ضرب طول و عرض و ارتفاع ماکسیمم باشد. این در حالتی است که طول و عرض و ارتفاع با هم برابر و برابر $\mathbf{\frac{L}{۳}}$ باشند.

۵ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** حجم مخروط به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h از رابطه‌ی $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ به‌دست می‌آید. سعی می‌کنیم رابطه‌ی مربوط به حجم را به یک رابطه‌ی تک متغیره تبدیل کنیم تا بتوانیم حالتی را که در آن ارتفاع مخروط ماکسیمم است، تعیین کنیم.



پله‌ی دوم: با توجه به شکل $h = R + x$, $r^{۲} = R^{۲} - x^{۲}$ است. با قرار دادن این مقادیر در رابطه‌ی حجم هرم داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}(R^{۲} - x^{۲})(R+x)$$

$$\Rightarrow V'_x = \frac{۱}{۳}(-۲x(R+x) + R^{۲} - x^{۲}) = ۰ \Rightarrow (R+x)(-۲x+R-x) = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{۳} \xRightarrow{h=R+x} h = \frac{۴R}{۳} \Rightarrow \mathbf{h = ۴}$$

در این سؤال $R=۳$ است، پس $h=۴$ خواهد بود.

توجه کنید که؛ ابتدا مسأله را در حالت کلی حل کردیم، سپس مقدار R را در آن قرار دادیم. شما می‌توانید از ابتدا با $R=۳$ مسأله را حل کنید.

۶ ـ (۳) **چشم‌انداز:** نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی منحنی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی $P(۲,۰)$ را نوشته و با استفاده از مشتق کمترین مقدار آن را حساب می‌کنیم.

پله‌ی یکم:

$$PM=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۰)^۲}\xrightarrow{x^۲-y^۲=۱}PM=\sqrt{(x-۲)^۲+x^۲-۱}$$

پله‌ی دوم:

$$\text{مشتق}=۰\Rightarrow ۴x-۴=۰\Rightarrow x=۱\xrightarrow{x^۲-y^۲=۱}y=۰$$

نقطه‌ی مورد نظر **(۱,۰)** است.

۷ ـ (۳) **چشم‌انداز:** فاصله‌ی نقطه‌ی متحرک M را از مبدأ مختصات تعیین می‌کنیم:

$$|OM|=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ t}+\tan^۲ t}=\sqrt{۱+\cot^۲ t+\tan^۲ t}$$

روش اول: پله‌ی یکم: برای تعیین کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدأ مختصات از رابطه‌ی به‌دست‌آمده برحسب t مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-۲\cot t(۱+\cot^۲ t)+۲\tan t(۱+\tan^۲ t)}{۲\sqrt{۱+\cot^۲ t+\tan^۲ t}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲\tan t(۱+\tan^۲ t)=۲\cot t(۱+\cot^۲ t)\Rightarrow ۲\frac{\tan t}{\cos^۲ t}=۲\frac{\cot t}{\sin^۲ t}$$

$$\Rightarrow \tan^۲ t=\cot^۲ t\xrightarrow{t\in[۰,\frac{\pi}{۲}]}t=\frac{\pi}{۴}$$

پله‌ی دوم: مختصات نقطه‌ی M در حالتی که کم‌ترین فاصله را از مبدأ مختصات دارد برابر $\left|\begin{matrix}x=\sqrt{۲}\\y=۱\end{matrix}\right.$ به‌دست می‌آید. کم‌ترین مقدار OM برابر است با:

$$|OM|=\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+۱^۲}=\sqrt{۲+۱}=\mathbf{\sqrt{۳}}$$

روش دوم: اگر فرض کنیم $\tan^۲ t=x$ عبارت $\tan^۲ t+\cot^۲ t$ برابر $x+\frac{۱}{x}$ می‌شود و می‌دانیم کم‌ترین مقدار $x+\frac{۱}{x}$ برای $x>۰$ برابر ۲ است، پس کم‌ترین مقدار $\tan^۲ t+\cot^۲ t+۱$ برابر ۱+۲ و کم‌ترین مقدار OM برابر $\mathbf{\sqrt{۳}}$ می‌شود.

۸ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مساحت کل قوطی استوانه‌ای برابر ۱۵۰π است. پس مجموع مساحت جانبی و دو برابر مساحت قاعده‌ی قوطی برابر ۱۵۰π است. *(سومی: چرا گفتیم دو برابر مساحت قاعده‌ی استوانه؟ چون قوطی ظرفی در بسته است و برای محاسبه‌ی مساحت کل آن باید علاوه بر مساحت کل ظرف مساحت دو طرف آن را هم در نظر بگیریم):*

$$\text{سطح کل}=۲\pi rh+۲\pi r^۲=۱۵۰\pi\Rightarrow rh+r^۲=۷۵$$

$$\Rightarrow rh=۷۵-r^۲\Rightarrow h=\frac{۷۵}{r}-r$$

پله‌ی دوم: حجم استوانه از رابطه‌ی $V=\pi r^۲h$ حساب می‌شود. به‌جای h مقدار به‌دست‌آمده برحسب r را جای‌گزین می‌کنیم:

$$V=\pi r^۲(\frac{۷۵}{r}-r)=\pi(۷۵r-r^۳)\xrightarrow{V'_r=۰}۷۵-۳r^۲=۰$$

$$\Rightarrow r^۲=۲۵\Rightarrow r=۵\Rightarrow h=۱۰$$

$$\Rightarrow \max(V)=\pi r^۲h=\pi(۵)^۲(۱۰)=\mathbf{۲۵۰\pi}$$

۹ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** نقطه‌ی A(x,y) را روی $y=\frac{۲}{x}$ در نظر می‌گیریم:

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+\frac{۴}{x^۲}}$$

پله‌ی دوم: اگر $x^۲=a$ و $\frac{۴}{x^۲}=b$ در نظر بگیریم $ab=x^۲\times\frac{۴}{x^۲}=۴$ است. چون حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت a و b برابر مقدار ثابت ۴ است مجموع آن‌ها وقتی مینیمم است که هر دو برابر باشند، پس $a=b=۲$ بنابراین:

$$\min(OA)=\min\sqrt{a+b}=\sqrt{۲+۲}=\mathbf{۲}$$

۱۰ ـ (۲) **روش اول: پله‌ی یکم:** با توجه به گزینه‌ها باید در مورد مقادیری که $x^۲+y^۲$ می‌تواند داشته باشد بحث کنیم. بنابراین $x^۲+y^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(x+y)^۲=x^۲+۲xy+y^۲\Rightarrow ۴^۲=x^۲+y^۲+۲xy$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۶-۲xy$$

پله‌ی دوم: بیش‌ترین مقداری که حاصل‌ضرب xy می‌تواند داشته باشد وقتی است که $x=y=۲$ باشد. بنابراین داریم: $x=y=۲\Rightarrow xy=۴\Rightarrow ۲xy=۸$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x^۲+y^۲$ برابر است با:

$$\min(x^۲+y^۲)=۱۶-\max(۲xy)=۱۶-۸=۸$$

بنابراین همواره $\mathbf{x^۲+y^۲\ge ۸}$ است.

روش دوم: اگر مجموع دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، مجموع مربعات آن‌ها وقتی مینیمم است که برابر باشند:

$$x+y=۴\Rightarrow\min(x^۲+y^۲)\xlongequal{x=y=۲}۴+۴=۸\Rightarrow\mathbf{x^۲+y^۲\ge ۸}$$

پاسخ آزمون ۲

۱ ـ (۱) **چشم‌انداز:** چون مجموع دو متغیر x و y مقدار ثابتی است، ماکسیمم xy زمانی رخ می‌دهد که $x=y=\frac{۱}{۲}$ باشند.

پس ماکسیمم xy برابر است با: $\Rightarrow\max(xy)\xlongequal{x=y=\frac{۱}{۲}}\mathbf{\frac{۱}{۴}}$

۲ ـ (۳) **روش اول: پله‌ی یکم:** y را برحسب x به‌دست آورده و عبارت xy را تشکیل می‌دهیم:

$$۳x+۴y=۲۴\Rightarrow ۴y=۲۴-۳x\Rightarrow y=۶-\frac{۳}{۴}x$$

$$\Rightarrow f=xy=x(۶-\frac{۳}{۴}x)=۶x-\frac{۳}{۴}x^۲$$

پله‌ی دوم: یک تابع تک‌متغیره به‌دست آمد. برای این‌که عبارت به‌دست‌آمده بیش‌ترین مقدار خود را داشته باشد از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'=۶-\frac{۳}{۲}x=۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}x=۶$$

$$x=۴\Rightarrow\max(f)=۲۴-۱۲=\mathbf{۱۲}$$

روش دوم: اگر فرض کنیم $a=۳x$ و $b=۴y$ پس $a+b=۲۴$ است ab وقتی ماکسیمم است که $a=b=۱۲$ یعنی $\max(ab)=۱۴۴$ از طرفی $ab=۱۲xy$ است پس:

$$\max(۱۲xy)=۱۴۴\Rightarrow\max(xy)=\mathbf{۱۲}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** اگر دو عدد موردنظر را x و y در نظر بگیریم $x+y=2400$ است. می‌خواهیم مجموع مربعات آن‌ها یا همان حاصل x^2+y^2 مینیمم باشد.

پله‌ی دوم: y را برحسب x به‌دست آورده و در عبارت x^2+y^2 قرار می‌دهیم. به یک تابع تک‌متغیره می‌رسیم. برای آن‌که x^2+y^2 کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد باید مشتق عبارت به‌دست‌آمده را نسبت به x حساب کرده و برابر صفر قرار دهیم:

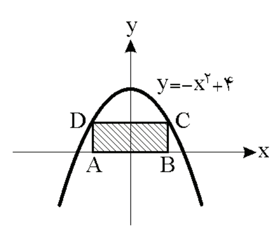
$$f=x^2+y^2 \xrightarrow{y=2400-x} f=x^2+(2400-x)^2$$
$$f'=2x+2(-1)(2400-x)=0 \Rightarrow x=1200$$
$$\xrightarrow{y=2400-x} y=2400-1200=1200$$

بنابراین x و y **هر دو** باید برابر **۱۲۰۰** باشند.
در حل این مسأله نخواستیم از قضیه استفاده کنیم!

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** سطح جانبی استوانه که آن را با S′ نشان می‌دهیم برابر $2\pi rh$ و سطح قاعده‌ی استوانه که آن را با S نشان می‌دهیم برابر πr^2 است:
$$S'+S=2\pi rh+\pi r^2=12$$
پله‌ی دوم: می‌خواهیم حجم استوانه ماکسیمم شود. رابطه‌ی حجم استوانه را به یک رابطه تک متغیره تبدیل کرده و با به‌دست‌آوردن مقداری که مشتق این تابع را برابر صفر می‌کند شعاعی که حجم ماکسیمم را به ما می‌دهد تعیین می‌کنیم:

$$2\pi rh+\pi r^2=12 \Rightarrow h=\frac{12-\pi r^2}{2\pi r}$$
$$V=\pi r^2h=\frac{1}{2}(12r-\pi r^3) \Rightarrow V'_r=\frac{1}{2}(12-3\pi r^2)=0$$
$$\Rightarrow r^2=\frac{4}{\pi} \Rightarrow \mathbf{r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}}$$

۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** منحنی $y=-x^2+4$ را رسم کرده و رئوس مستطیل را مشخص می‌کنیم:



پله‌ی دوم: اگر C(x,y) را روی منحنی در نظر بگیریم مساحت مستطیل $S=2xy$ است.
$$S=2xy \xrightarrow{y=-x^2+4} S=2x(-x^2+4)=-2x^3+8x$$
$$S'=-6x^2+8=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \max(S)=2(\frac{2}{\sqrt{3}})(-\frac{4}{3}+4)=\mathbf{\frac{32}{3\sqrt{3}}}$$

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** نقطه‌ی M(x,y) را روی منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-2$ در نظر می‌گیریم فاصله‌ی این نقطه تا نقطه‌ی A(0,11) برابر است با:
$$AM=\sqrt{x^2+(y-11)^2}\xrightarrow{x^2=2y+4}\sqrt{2y+4+(y-11)^2}=\sqrt{y^2-20y+125}$$

پله‌ی دوم: از رابطه‌ی داده‌شده نسبت به y مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.
$$\text{مشتق}=\frac{2y-20}{2\sqrt{y^2-20y+125}}=0 \Rightarrow y=10$$
$$\Rightarrow \min(AM)=\sqrt{100-200+125}=\mathbf{5}$$

۷ ـ (۳) **چشم‌انداز:** اگر مولد مخروط را l و شعاع قاعده r و ارتفاع مخروط h باشد، $l^2=r^2+h^2$ است. حالا بیش‌ترین حجم را برای مخروط‌هایی که $l=3\sqrt{3}$ سانتی‌متر است محاسبه می‌کنیم.
پله‌ی یکم: r^2 را برحسب h به‌دست می‌آوریم:
$$l^2=r^2+h^2 \Rightarrow (3\sqrt{3})^2=r^2+h^2=27 \Rightarrow r^2=27-h^2$$
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(27-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(27h-h^3)$$
$$V'=\frac{1}{3}\pi(27-3h^2)=0 \Rightarrow 27-3h^2=0 \Rightarrow 3h^2=27$$
$$\Rightarrow h^2=9 \Rightarrow h=3 \xrightarrow{r^2=27-h^2} r^2=18$$
پله‌ی دوم: حجم مخروط را به‌دست می‌آوریم:
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(18)(3)=\mathbf{18\pi}$$

۸ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** نقطه‌ی M روی منحنی $y=-x^2-1$ قرار دارد. بنابراین می‌توان نوشت: $y_1=-x_1^2-1$. بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $x-y+1=0$ را به‌دست می‌آوریم:
$$D=\frac{|x_1-(-x_1^2-1)+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x_1^2+x_1+2|}{\sqrt{2}}$$
پله‌ی دوم: کم‌ترین فاصله‌ی MN زمانی رخ می‌دهد که عبارت داخل قدرمطلق مینیمم باشد. بنابراین باید مشتق عبارت $x_1^2+x_1+2$ نسبت به x_1 را برابر صفر قرار دهیم. $2x_1+1=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$
پله‌ی سوم: با به‌دست‌آوردن x_1 کم‌ترین فاصله‌ی MN را حساب می‌کنیم:
$$\min(MN)=\frac{|(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{7\sqrt{2}}{8}}$$

۹ ـ (۱) فرض می‌کنیم $\cos x=t$ باشد بیش‌ترین مقدار $y=(13-t)(1+t)$ را با شرط $t\in[-1,1]$ تعیین می‌کنیم.
$$y'=-(1+t)+13-t=0 \Rightarrow t=6 \text{ غ‌ق‌ق}$$
$$t=-1 \Rightarrow y=0$$
$$t=1 \Rightarrow y=24$$
پس ماکسیمم تابع **۲۴** است.

۱۰ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مستطیل را با طول x و عرض y در نظر می‌گیریم. بنابراین $x+y=8$ است.

پله‌ی دوم: طول قطر مستطیل با طول x و عرض y برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است. چون مجموع دو متغیر مثبت x و y برابر ۸ است مجموع مربعات آن‌ها وقتی مینیمم است که برابر باشند، پس:
$$\min(\sqrt{x^2+y^2}) \xrightarrow{x=y=4} \sqrt{16+16}=\mathbf{4\sqrt{2}}$$

پاسخ آزمون ۳

۱ ـ (۱) روش اول: پله‌ی یکم: سطح جانبی استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر $S=۲\pi rh$ است. h را برحسب r به‌دست آورده و آن را در رابطه‌ی $S=۲\pi rh$ جای‌گذاری می‌کنیم:

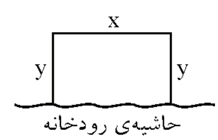
$$S=۲\pi rh \xRightarrow{h=۱۵-r} S=۲\pi r(۱۵-r)=۲\pi(۱۵r-r^{۲})$$

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن مقدار r ای که به‌ازای آن سطح جانبی استوانه ماکسیمم می‌شود از S نسبت به r مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$S'=۲\pi(۱۵-۲r)=۰\Rightarrow ۱۵-۲r=۰\Rightarrow ۲r=۱۵\Rightarrow \mathbf{r=۷/۵}$$

روش دوم: مجموع دو متغیر مثبت r و h برابر مقدار ثابت ۱۵ است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها (rh) وقتی ماکسیمم است که: $h=r=\mathbf{۷/۵}$

۲ ـ (۲) پله‌ی یکم: یک ضلع مستطیل در حاشیه‌ی رودخانه است. پس برای ساختن مستطیل باید سه ضلع آن را تشکیل دهیم. در این صورت شکل مستطیل به‌صورت روبه‌رو می‌شود:



که $x+۲y=۴۸$ است.

پله‌ی دوم: می‌خواهیم xy ماکسیمم شود. بنابراین مقدار x و ۲y که مجموع آن‌ها یک مقدار ثابت است باید با هم برابر شود.

$$x=۲y=۲۴\Rightarrow \max(xy)=۲۴\times۱۲=\mathbf{۲۸۸}$$

۳ ـ (۱) پله‌ی یکم: فرض می‌کنیم $x=\log a$ و $y=\log b$ باشد:

$$x+y=\log a+\log b=\log ab=\log ۱۰=۱$$

پله‌ی دوم: چون $x+y=۱$ است، مقدار $\log a\times\log b$ یا همان xy وقتی ماکسیمم است که $x=y=\frac{۱}{۲}$ باشد: $\max(xy)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\mathbf{\frac{۱}{۴}}$

۴ ـ (۴) پله‌ی یکم: فرض می‌کنیم $t=\sin x$ باشد، پس $t\in[-۱,۱]$ است.

$$y=(۳-۲t)(۵+۲t)=-۴t^{۲}-۴t+۱۵$$

$$y'=-۸t-۴=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۲}$$

پله‌ی دوم: با قرار دادن $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۱$ و $t=-۱$ در تابع کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم:

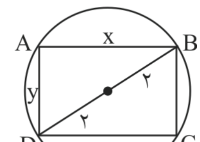
$$t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۶$$

$$t=-۱\Rightarrow y=۱۵$$

$$t=۱\Rightarrow y=۷$$

پس کمترین مقدار تابع ۷ و بیش‌ترین مقدار آن **۱۶** است.

۵ ـ (۱) پله‌ی یکم: دایره و مستطیل درون آن را رسم می‌کنیم:



در این حالت قطر دایره و مستطیل برابر است. بنابراین داریم:

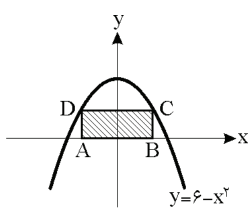
$$\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۲R=۲\times۲=۴\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۱۶$$

پله‌ی دوم: مساحت مستطیل برابر xy است. اگر $x^{۲}=a$ و $y^{۲}=b$ در نظر بگیریم $a+b=۱۶$ است و عبارت ab وقتی ماکسیمم می‌شود که $a=b=۸$ باشد. پس: $\max(ab)=۸\times۸=۶۴\Rightarrow \max(x^{۲}y^{۲})=۶۴$

$$\max(xy)=۸$$

(سومی: بنابراین بیش‌ترین مساحت یک مستطیل محاط درون دایره زمانی رخ می‌دهد که مستطیل تبدیل به مربع شود)

۶ ـ (۴) پله‌ی یکم: نقطه‌ی $c(x,y)$ را روی منحنی مطابق شکل در نظر می‌گیریم. محیط مستطیل برابر است با:



$$P=۲(۲x+y)\xlongequal{y=۶-x^{۲}}۲(۲x+۶-x^{۲})$$

پله‌ی دوم: با استفاده از مشتق ماکسیمم این عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$P'_x=۲(۲-۲x)=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \max(P)=۲(۷)=\mathbf{۱۴}$$

۷ ـ (۲) روش اول: پله‌ی یکم: ابتدا عبارت xy را برحسب متغیر x تشکیل می‌دهیم:

$$S=xy \xRightarrow{y=\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۴}}} S=x\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۴}} \xlongequal{x>۰} \sqrt{x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۴}}$$

پله‌ی دوم: چون عبارت xy ماکسیمم است پس مشتق آن نسبت به x را به‌دست آورده و برابر صفر قرار داده و x و y را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$S'=\frac{۲x-x^{۳}}{۲\sqrt{x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۴}}}=۰\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

$$\frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲}=۱\Rightarrow \frac{۲}{۴}+y^{۲}=۱\Rightarrow y^{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پله‌ی سوم: حاصل $\frac{x}{y}$ برابر است با:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\mathbf{۲}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $a=\frac{x^{۲}}{۴}$ و $b=y^{۲}$ چون $a+b=۱$ است عبارت $ab=\frac{x^{۲}y^{۲}}{۴}$ و به تبع آن xy وقتی ماکسیمم است که $a=b=\frac{۱}{۲}$ باشد، پس:

$$\frac{x^{۲}}{۴}=y^{۲}\Rightarrow \frac{x^{۲}}{y^{۲}}=۴\Rightarrow \frac{x}{y}=\mathbf{۲}$$

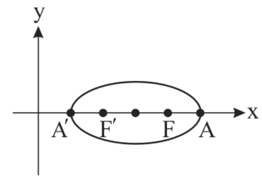
۸ ـ (۴) پله‌ی یکم: نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم فاصله‌ی آن تا مبدأ برابر است با:

$$OM=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \xRightarrow{y^{۲}=-۲x+۴} OM=\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}$$

پله‌ی دوم: اگر مشتق این عبارت را صفر قرار دهیم کم‌ترین مقدار آن به‌دست می‌آید:

مشتق $=۰\Rightarrow ۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \min(OM)=\sqrt{۱-۲+۴}=\mathbf{\sqrt{۳}}$

۹ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** منحنی داده‌شده یک بیضی افقی به مرکز $(۳,۰)$ و $a=۲$ و $b=۱$ است و شکل آن به‌صورت مقابل است:



پله‌ی دوم: نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی به مبدأ رأس A' است که مختصات آن برابر **$(۱,۰)$** است.

۱۰ ـ (۱) **روش اول: پله‌ی یکم:** در رابطه‌ی $S=\frac{۱}{۲}hL$ که بیان‌گر مساحت مثلث است مقدار h را برحسب L جای‌گذاری می‌کنیم:

$$h+۲L=۷ \Rightarrow h=۷-۲L$$
$$S=\frac{۱}{۲}hL=\frac{۱}{۲}(۷-۲L)L=\frac{۱}{۲}(۷L-۲L^۲)$$

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن ماکسیمم مساحت مثلث‌ها از S نسبت به L مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S'=\frac{۱}{۲}(۷-۴L)=۰ \Rightarrow ۷-۴L=۰ \Rightarrow L=\frac{۷}{۴} \Rightarrow h=۷-۲L=\frac{۷}{۲}$$

بیش‌ترین مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{max}=\frac{۱}{۲}hL=\frac{۱}{۲}(\frac{۷}{۲})(\frac{۷}{۴})=\mathbf{\frac{۴۹}{۱۶}}$$

روش دوم: پله‌ی یکم: اگر $h=x$ و $۲L=y$ در نظر بگیریم $x+y=۷$ است و عبارت xy وقتی ماکسیمم می‌شود که $x=y=\frac{۷}{۲}$

پله‌ی دوم: $\max(xy)=\frac{۷}{۲}\times\frac{۷}{۲}=\frac{۴۹}{۴} \Rightarrow \max(۲hL)=\frac{۴۹}{۴}$

می‌دانیم مساحت مثلث $S=\frac{۱}{۲}hL$ است، پس:

$$\max(S)=\frac{۱}{۴}(۲hL)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴۹}{۴}=\mathbf{\frac{۴۹}{۱۶}}$$

پاسخ آزمون ۴

۱ ـ (۱) **چشم‌انداز:** در عبارت $۲y^۲-۴x^۲$ مقدار y را برحسب x قرار می‌دهیم تا به یک عبارت تک‌متغیره برسیم. سپس از عبارت به‌دست‌آمده نسبت به x مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم و x و y ای که حداکثر عبارت $۲y^۲-۴x^۲$ را به ما می‌دهد، تعیین می‌کنیم.

پله‌ی یکم: $f=۲y^۲-۴x^۲ \xRightarrow{y=a-x} f=۲(a-x)^۲-۴x^۲$

$$=۲(a^۲-۲ax+x^۲)-۴x^۲=-۲x^۲-۴ax+۲a^۲$$
$$f'=-۴x-۴a=۰ \Rightarrow ۴x=-۴a \Rightarrow x=-a$$
$$\xRightarrow{y=a-x} y=a-(-a)=a+a=۲a$$

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=-a$ و $y=۲a$ حداکثر عبارت $۲y^۲-۴x^۲$ به‌دست می‌آید که برابر است با: $۸a^۲-۴a^۲=\mathbf{۴a^۲}$

۲ ـ (۳) **روش اول: پله‌ی یکم:** $x+y$ دارای مقدار ثابت ۶ است. y را برحسب x به‌دست آورده و عبارت $xy^۲$ را برحسب متغیر x به‌دست می‌آوریم:

$$x+y=۶ \Rightarrow y=۶-x$$
$$S=xy^۲=x(۶-x)^۲ \Rightarrow S'=(۶-x)^۲+x(۲)(-۱)(۶-x)$$
$$=(۶-x)(۶-x-۲x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \Rightarrow y=۰ & \text{غ‌ق‌ق} \\ ۳x=۶ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۴ \end{cases}$$

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=۲$ و $y=۴$ حاصل $xy^۲$ ماکسیمم می‌شود:

$$xy^۲=۲(۴)^۲=۲\times۱۶=\mathbf{۳۲}$$

روش دوم: اگر $x+y=۶$ باشد $xy^۲$ وقتی ماکسیمم است که $\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}$ باشد.

پس: $\left.\begin{matrix} y=۲x \\ x+y=۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=۲, y=۴ \Rightarrow \max(xy^۲)=۲(۴)^۲=\mathbf{۳۲}$

۳ ـ (۱) **چشم‌انداز:** نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم، فاصله‌ی آن را تا نقطه‌ی $A(۱,۰)$ نوشته و مینیمم مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

پله‌ی یکم: $AM=\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲} \xRightarrow{y=\sqrt{x}}$

$$AM=\sqrt{(x-۱)^۲+x}=\sqrt{x^۲-x+۱}$$

پله‌ی دوم: $\text{مشتق}=۰ \Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \min(AM)=\sqrt{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۱}=\mathbf{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

۴ ـ (۲) **چشم‌انداز:** مساحت جانبی مخروط دوار برابر πrl است که l مولد مخروط و برابر $\sqrt{r^۲+h^۲}$ است و با استفاده از این رابطه حجم مخروط را بر حسب یک متغیر نوشته و با استفاده از مشتق بیشترین مقدار آن را تعیین می‌کنیم:

$$\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}=۱۶\sqrt{۳}\pi \Rightarrow r^۲(r^۲+h^۲)=(۱۶\sqrt{۳})^۲$$
$$\Rightarrow h^۲=\frac{۲۵۶\times۳}{r^۲}-r^۲$$
$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{\pi}{۳}r^۲\sqrt{\frac{۲۵۶\times۳}{r^۲}-r^۲}=\frac{\pi}{۳}\sqrt{۲۵۶\times۳r^۲-r^۶}$$
$$V'_r=۰ \Rightarrow ۲۵۶\times۶r-۶r^۵=۰ \Rightarrow r^۴=۲۵۶ \Rightarrow \mathbf{r=۴}$$

۵ ـ (۲) **روش اول: پله‌ی یکم:** مختصات نقطه‌ی M را $(\alpha,۰)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $MA+MB$ برابر است با:

$$MA+MB=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲)^۲}+\sqrt{(\alpha-۴)^۲+(۴)^۲}$$
$$=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+۴}+\sqrt{(\alpha-۴)^۲+۱۶}$$

پله‌ی دوم: برای این‌که کم‌ترین مقدار $MA+MB$ را به‌دست آوریم از عبارت به‌دست‌آمده نسبت به α مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

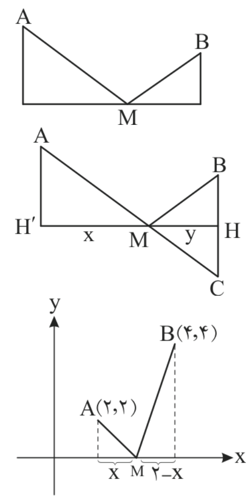
$$S=MA+MB \Rightarrow S'=\frac{۲(\alpha-۲)}{۲\sqrt{(\alpha-۲)^۲+۴}}+\frac{۲(\alpha-۴)}{۲\sqrt{(\alpha-۴)^۲+۱۶}}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha-۲}{\sqrt{(\alpha-۲)^۲+۴}}=-\frac{\alpha-۴}{\sqrt{(\alpha-۴)^۲+۱۶}} \xRightarrow{\text{به توان ۲}}$$
$$\frac{(\alpha-۲)^۲}{(\alpha-۲)^۲+۴}=\frac{(\alpha-۴)^۲}{(\alpha-۴)^۲+۱۶}$$
$$\Rightarrow (\alpha-۲)^۲(\alpha-۴)^۲+۱۶(\alpha-۲)^۲=(\alpha-۲)^۲(\alpha-۴)^۲+۴(\alpha-۴)^۲$$

$$\Rightarrow ۴(\alpha-۲)^۲=(\alpha-۴)^۲ \Rightarrow ۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۶=\alpha^۲-۸\alpha+۱۶$$

$$\Rightarrow ۳\alpha^۲-۸\alpha=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۰ & \text{غقق}\\ \alpha=\dfrac{۸}{۳}\end{cases}$$

(سومی: $\alpha=۰$ به این دلیل غیرقابل قبول است که یک طرف تساوی مثبت و یک طرف تساوی منفی می‌شود.)

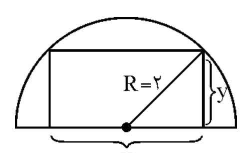
روش دوم: چشم‌انداز: در شکل مقابل اگر بخواهیم $MA+MB$ مینیمم شود باید نقطه‌ی M چنان قرار گیرد که در شکل زیر $BH=CH$ و نقاط A، M و C روی یک خط راست باشند در این صورت $\frac{x}{y}=\frac{AH'}{BH}$ در این سؤال شکل به‌صورت روبه‌رو است پس:



$$\frac{x}{۲-x}=\frac{۲}{۴} \Rightarrow ۲x=۲-x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \Rightarrow x_M=۲+\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

۶ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** با توجه به شکل روبه‌رو $(\frac{x}{۲})^۲+y^۲=R^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+y^۲=۴$ است.

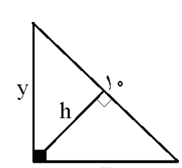


پله‌ی دوم: می‌خواهیم مساحت مستطیل یا همان xy ماکسیمم شود. بنابراین $\frac{x^۲}{۴}$ و $y^۲$ باید با هم برابر و برابر ۲ باشند.

$$\frac{x^۲}{۴}=۲ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad y^۲=۲ \Rightarrow y=\sqrt{۲}$$

$$\max(xy)=(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۲})=۲\times ۲=\mathbf{۴}$$

۷ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** با توجه به شکل روبه‌رو $x^۲+y^۲=۱۰^۲=۱۰۰$ و $xy=۱۰h$ است.



پله‌ی دوم: مقدار وتر که ثابت است. پس اگر مقدار xy ماکسیمم شود اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر هم ماکسیمم می‌شود. پس ما باید بیش‌ترین مقدار xy را تعیین کنیم:

$$x^۲+y^۲=۱۰۰ \xrightarrow{\text{xy ماکسیمم است}} x^۲=y^۲=۵۰ \Rightarrow x=y=\sqrt{۵۰}$$

$$xy=(\sqrt{۵۰})(\sqrt{۵۰})=۱۰h \Rightarrow ۵۰=۱۰h \Rightarrow \mathbf{h=۵}$$

۸ ـ ۳ **روش اول: پله‌ی یکم:** $xy=۶$ است. پس $y=\frac{۶}{x}$ است.

$$S=۳x+۲y \xrightarrow{y=\frac{۶}{x}} S=۳x+\frac{۱۲}{x}$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی $S'=۰$ را حل کرده و کم‌ترین مقدار عبارت $۳x+۲y$ را حساب می‌کنیم:

$$S'=۳-\frac{۱۲}{x^۲}=۰ \Rightarrow \frac{۱۲}{x^۲}=۳ \Rightarrow x^۲=۴ \xrightarrow{x>۰} x=۲ \xrightarrow{xy=۶} y=۳$$

بنابراین مینیمم $۳x+۲y$ برابر است با:

$$۳x+۲y=۳(۲)+۲(۳)=۶+۶=\mathbf{۱۲}$$

روش دوم: اگر $a=۳x$ و $b=۲y$ در نظر بگیریم $ab=۶xy=۶(۶)=۳۶$ است، پس عبارت $۳x+۲y=a+b$ وقتی مینیمم است که $a=b=۶$ شود، در نتیجه: $\min(a+b)=۶+۶=\mathbf{۱۲}$

۹ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** قاعده‌ی مکعب مستطیل مربع و مجموع طول و عرض و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. بنابراین اگر طول و عرض آن را برابر x و ارتفاع آن را برابر y فرض کنیم، خواهیم داشت: $۲x+y=۱۲$

پله‌ی دوم: سطح کل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S=۲(x^۲+xy+xy)=۲(x^۲+۲xy)=۲x^۲+۴xy$$

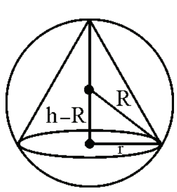
می‌خواهیم عبارت بالا ماکسیمم باشد. با توجه به این‌که $۲x+y=۱۲$ است مقدار y را برابر $۱۲-۲x$ قرار داده و از این عبارت تک‌متغیره نسبت به x مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S=۲x^۲+۴xy=۲x^۲+۴x(۱۲-۲x)=۲x^۲+۴۸x-۸x^۲=-۶x^۲+۴۸x$$

$$S'=۰ \Rightarrow -۱۲x+۴۸=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲x+y=۱۲ \Rightarrow y=۴$$

بنابراین اگر ارتفاع برابر **۴** باشد سطح کل مکعب مستطیل ماکسیمم می‌شود.

۱۰ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** در شکل روبه‌رو داریم:



$$(h-R)^۲+r^۲=R^۲ \xrightarrow{R=۶} (h-۶)^۲+r^۲=۳۶$$

$$\Rightarrow r^۲=۳۶-(h-۶)^۲=۳۶-h^۲+۱۲h-۳۶$$

$$=-h^۲+۱۲h$$

پله‌ی دوم: در محاسبه‌ی حجم مخروط از رابطه‌ی $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ به‌جای $r^۲$ عبارت $-h^۲+۱۲h$ را قرار داده و از آن نسبت به h مشتق می‌گیریم. مقدار h ای که به‌ازای آن مشتق برابر صفر می‌شود جواب موردنظر ماست:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi(-h^۲+۱۲h)h=\frac{۱}{۳}\pi(-h^۳+۱۲h^۲)$$

$$\Rightarrow V'_h=\frac{۱}{۳}\pi(-۳h^۲+۲۴h)=۰ \Rightarrow ۲۴h-۳h^۲=۰ \xrightarrow{h\neq ۰} \mathbf{h=۸}$$

پاسخ آزمون ۵

۱ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** $xy=۱۶$ است. بنابراین $y=\frac{۱۶}{x}$ و داریم:

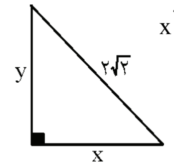
$$S=x^۲+y=x^۲+\frac{۱۶}{x}$$

پله‌ی دوم: S' را تعیین کرده و با حل معادله‌ی $S'=۰$ مقدار x و y را تعیین می‌کنیم:

$$S'=۲x-\frac{۱۶}{x^۲}=۰ \Rightarrow ۲x=\frac{۱۶}{x^۲} \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲$$

$$\xrightarrow{xy=۱۶} y=۸ \Rightarrow \min(x^۲+y)=۴+۸=\mathbf{۱۲}$$

۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** در مثلث مقابل $x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$ و $P=x+y+2\sqrt{2}$ = محیط است.



پله‌ی دوم: از رابطه‌ی اول y را برحسب x تعیین کرده و در رابطه‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$x^2+y^2=8 \Rightarrow y^2=8-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{8-x^2}$$
$$P=x+y+2\sqrt{2}=x+\sqrt{8-x^2}+2\sqrt{2}$$
$$P'=1+\frac{(-2x)}{2\sqrt{8-x^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{8-x^2}=x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 8-x^2=x^2$$
$$\Rightarrow x^2=4 \xRightarrow{x>0} x=2 \Rightarrow y=\sqrt{8-4}=\sqrt{4}=2$$

بنابراین مقدار مساحت مثلث برابر است با: $S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}(2)(2)=\mathbf{2}$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن تا مبدأ را مینیمم می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2} \xRightarrow{xy^2=54} OM=\sqrt{x^2+\frac{54}{x}}$$

پله‌ی دوم: برای مینیمم شدن این عبارت مشتق زیر رادیکال را صفر قرار می‌دهیم:

$$\text{مشتق}=0 \Rightarrow 2x-\frac{54}{x^2}=0 \Rightarrow x^3=27 \Rightarrow x=3$$
$$\min(OM)=\sqrt{9+18}=\mathbf{3\sqrt{3}}$$

۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مختصات نقطه‌ی A و B به‌ترتیب $A(1,0)$ و $B(4,0)$ است. نقطه‌ی M روی نیمساز ناحیه‌ی اول قرار دارد و مقدار x و y آن برابر است. بنابراین مختصات نقطه‌ی M را به‌صورت $M(\alpha,\alpha)$ در نظر می‌گیریم. مجموع مربعات فواصل نقطه‌ی M از نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}|MA|&=\sqrt{(\alpha-1)^2+\alpha^2}\\ |MB|&=\sqrt{(\alpha-4)^2+\alpha^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow |MA|^2+|MB|^2$$
$$=(\alpha-1)^2+\alpha^2+(\alpha-4)^2+\alpha^2=2\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha-4)^2$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم $|MA|^2+|MB|^2$ مینیمم شود. از عبارت به‌دست‌آمده نسبت به α مشتق گرفته و آن را با صفر مساوی قرار می‌دهیم. α به‌دست‌آمده همان طول نقطه‌ی M است:

$$d=|MA|^2+|MB|^2 \Rightarrow d'=4\alpha+2(\alpha-1)+2(\alpha-4)$$
$$\Rightarrow 4\alpha+2\alpha-2+2\alpha-8=0 \Rightarrow 8\alpha=10 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=\frac{5}{4}}$$

۵ ـ (۱) **چشم‌انداز:** با توجه به تساوی $3x+y=20$ مقدار y را برحسب x به‌دست می‌آوریم. عبارت x^2+y^2 را براساس متغیر x تشکیل می‌دهیم. برای این‌که x^2+y^2 مینیمم باشد از آن نسبت به x مشتق گرفته و برای صفر قرار می‌دهیم.

پله‌ی یکم: $3x+y=20 \Rightarrow y=20-3x$

$$f=x^2+y^2=x^2+(20-3x)^2$$
$$=10x^2-120x+400 \Rightarrow f'=20x-120=0 \Rightarrow x=6 \xRightarrow{y=20-3x} y=2$$

پله‌ی دوم: مقدار $x+y$ برابر است با: $x+y=6+2=8$

۶ ـ (۱) **روش اول: پله‌ی یکم:** اگر شعاع قاعده‌ی استوانه r و ارتفاع استوانه h باشد، $h+r=3$ است. حجم استوانه از رابطه‌ی $V=\pi r^2h$ به‌دست می‌آید. مقدار h را برحسب r به‌دست می‌آوریم و V را براساس متغیر r تشکیل می‌دهیم.

$$V=\pi r^2h \xRightarrow{h=3-r} V=\pi r^2(3-r)=\pi(3r^2-r^3)$$

پله‌ی دوم: از V نسبت به r مشتق گرفته و معادله‌ی $V'=0$ را حل می‌کنیم. r موردنظر همان شعاعی است که بیش‌ترین حجم را به ما می‌دهد.

$$V'=\pi(6r-3r^2)=0 \Rightarrow 6r-3r^2=3r(2-r)=0$$
$$\xRightarrow{r\neq0} 2-r=0 \Rightarrow r=2 \xRightarrow{h=3-r} h=1$$

بنابراین V_{max} برابر است با: $V_{max}=\pi r^2h=\pi(2)^2(1)=\mathbf{4\pi}$

روش دوم: $r+h=3$ است عبارت r^2h وقتی ماکسیمم است که $\frac{r}{2}=\frac{h}{1}$:

$$\left.\begin{aligned}r&=2h\\ r+h&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow h=1, r=2 \Rightarrow \max V=\pi(2)^2(1)=\mathbf{4\pi}$$

۷ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** هر ضلع قاعده‌ی مربعی شکل را x و ارتفاع مکعب مستطیل را y در نظر می‌گیریم. سطح کل مکعب مستطیل بدون در برابر $12cm^2$ است. بنابراین: $S=2(xy+xy)+x^2=4xy+x^2=12$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم حجم مکعب مستطیل یا همان x^2y ماکسیمم شود. برای این کار ابتدا y را برحسب x تعیین کرده و در فرمول حجم جای‌گذاری می‌کنیم:

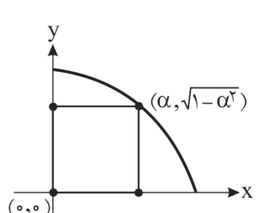
$$4xy+x^2=12 \Rightarrow y=\frac{12-x^2}{4x} \Rightarrow V=x^2y=3x-\frac{x^3}{4}$$

پله‌ی سوم: حجم مکعب مستطیل برحسب x به‌دست آمد. برای این‌که حجم ماکسیمم شود از V نسبت به x مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. به‌ازای x ای که به‌دست می‌آید حجم مکعب مستطیل ماکسیمم می‌شود:

$$V'=3-\frac{3x^2}{4}=0 \Rightarrow \frac{3x^2}{4}=3 \Rightarrow x^2=4$$
$$\xRightarrow{x>0} x=2 \Rightarrow y=1$$

بنابراین مقدار y یا همان ارتفاع باید برابر **۱** سانتی‌متر باشد.

۸ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مختصات رئوس مستطیل را به‌صورت پارامتری در نظر گرفته، محیط مستطیل را هم به‌صورت پارامتری به‌دست می‌آوریم:



$$\text{محیط مستطیل}=2(\alpha+\sqrt{1-\alpha^2})=2\alpha+2\sqrt{1-\alpha^2}$$

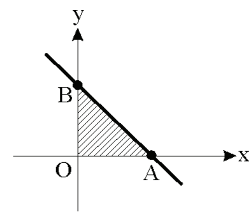
پله‌ی دوم: برای تعیین ماکسیمم محیط مستطیل از عبارت پارامتری که برابر محیط مستطیل است نسبت به α مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$P=2\alpha+2\sqrt{1-\alpha^2} \Rightarrow P'=2+2\left(\frac{-2\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$
$$=2-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=0 \Rightarrow \alpha^2=1-\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{2} \xRightarrow{\alpha>0} \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پله‌ی سوم: بنابراین ماکسیمم محیط مستطیل برابر است با:

$$P_{max} = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۲(\sqrt{۲}) = \mathbf{۲\sqrt{۲}}$$

۹ – ۲ **پله‌ی یکم**: بهتر است در همین ابتدای کار توضیحات گفته شده در تست را بر روی یک شکل نمایش دهیم.



مختصات نقطه‌ی A و نقطه‌ی B یا همان محل برخورد نمودار y با محور طول‌ها و محور عرض‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$y = mx + (۱-m) \xRightarrow{y=۰} mx+(۱-m)=۰ \Rightarrow x = \frac{m-۱}{m} \Rightarrow A(\frac{m-۱}{m},۰)$$

$$y = mx+(۱-m) \xRightarrow{x=۰} y = ۱-m \Rightarrow B(۰,۱-m)$$

پله‌ی دوم: مساحت مثلث OAB را برحسب m تعیین می‌کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{۱}{۲}|OA||OB| = \frac{۱}{۲}(\frac{m-۱}{m})(۱-m) = -\frac{۱}{۲}\frac{(m-۱)^۲}{m}$$

برای این‌که مساحت مثلث OAB مینیمم شود از مساحت مثلث نسبت به m مشتق می‌گیریم. و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = -\frac{۱}{۲}\frac{۲(m-۱)m-(m-۱)^۲}{m^۲} = \frac{(m-۱)^۲-m(۲m-۲)}{۲m^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۱)(m-۱-۲m)=۰ \Rightarrow (m-۱)(-m-۱)=۰ \xRightarrow{m<۰} \mathbf{m=-۱}$$

(سومی: m به این دلیل منفی است که شیب خط $y = mx+(۱-m)$ باید منفی باشد.)

۱۰ – ۳ **پله‌ی یکم**: سیمی را به طول l به یک مستطیل با طول x و عرض y تبدیل شده است. بنابراین داریم:

محیط مستطیل $= ۲(x+y) = l \Rightarrow ۲x+۲y = l$

اگر فرض کنیم $۲x = a$ و $۲y = b$ باشد $a+b=l$ است، پس:

پله‌ی دوم: می‌خواهیم xy ماکسیمم شود.

$$\max(ab) \xlongequal{a=b=\frac{l}{۲}} \frac{l}{۲}\times\frac{l}{۲} = \frac{l^۲}{۴} \Rightarrow \max(۴xy) = \frac{l^۲}{۴} \Rightarrow \max(xy) = \mathbf{\frac{l^۲}{۱۶}}$$