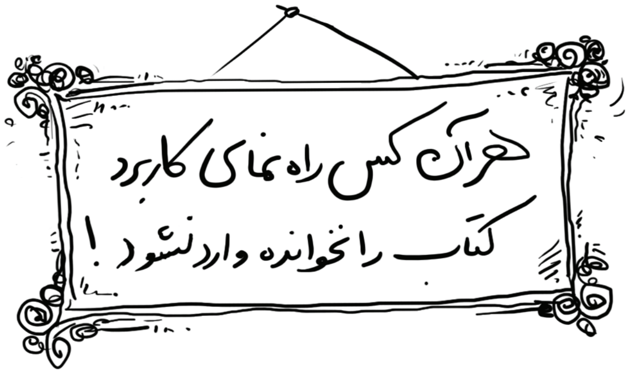


فهرست

فهرست

بخش ۲ صفحه

آزمون یکم (ساده)

۱۵ دقیقه

۱ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که در نقطه‌ی $A(1,-1,1)$ بر بردار $\overrightarrow{OA}$ عمود است، کدام است؟ (آزاد ـ ۷۱)

۱) $x+y-z=-1$ ۲) $x+y-z=1$ ۳) $x-y+z=3$ ۴) $x+y-z=0$

۲ ـ صفحه‌ای که شامل دو خط $z=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ و $z=\frac{y}{2}=\frac{x}{3}$ باشد، با کدام صفحه موازی است؟ (آزاد ـ ۷۷)

۱) $x+y+z=5$ ۲) $x+y-5z=1$ ۳) $x+y+5z=1$ ۴) $x-y+5z=1$

۳ ـ نقطه‌ی تقاطع صفحه‌ی $2x+y-z-6=0$ با محور $x'ox$ کدام نقطه است؟ (آزاد ـ ۷۲)

۱) $(3,0,0)$ ۲) $(0,3,0)$ ۳) $(0,0,3)$ ۴) $(0,1,-5)$

۴ ـ صفحه‌ی $x+y+2z=4$ محورهای مختصات را در نقاط A، B و C قطع می‌کند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) $4\sqrt{6}$ ۴) $8\sqrt{6}$

۵ ـ صفحه‌ی $2z-5=0$ چگونه صفحه‌ای است؟ (آزاد ـ ۶۳)

۱) موازی صفحه‌ی xoy ۲) موازی صفحه‌ی xoz
۳) موازی صفحه‌ی yoz ۴) موازی صفحه‌ی $x+y+z=0$

۶ ـ مقدار m برای آن‌که دو صفحه به معادلات $x+y+z+1=0$ و $2x+2y+2mz+7=0$ موازی باشند، کدام است؟ (آزاد ـ ۷۱)

۱) $m=-1$ ۲) $m=\pm 1$ ۳) $m=1$ ۴) $m=0$

۷ ـ فاصله‌ی نقطه‌ی $(2,-1,2)$ از صفحه‌ی $x+y=0$ کدام است؟ (سراسری ـ ۷۴)

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۸ ـ زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $p: x+2y+1=0$ و $p': y+2z+1=0$ برابر است با: (آزاد ـ ۶۷)

۱) $\text{Arc}\tan\frac{2}{5}$ ۲) $\text{Arc}\cos\frac{2}{5}$ ۳) $\text{Arc}\sin\frac{5}{11}$ ۴) $\text{Arc}\tan\frac{5}{2}$

درصد:	وضعیت: خوب ◇ متوسط ◇ ضعیف ◇	شماره‌ی تست‌های نادرست و نزده: ....

آزمون دوم (متوسط)

۱۵ دقیقه

۱ ـ معادله‌ی صفحه‌ی عمود بر خط $\Delta : x = -2y = z$ و گذرنده از نقطه‌ی $(-1,2,1)$ کدام است؟ (سراسری ـ ۷۳)

۱) $2x - y + 2z + 2 = 0$ ۲) $x - 2y + z + 4 = 0$ ۳) $-x - 2y + z + 2 = 0$ ۴) $x + 2y - z + 4 = 0$

۲ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که از دو خط به معادلات $-x = 1 - y = z + 2$ و $\frac{z}{2} = \frac{2y+2}{-4} = \frac{x+1}{-1}$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y + z - 1 = 0$ ۲) $y + z + 1 = 0$ ۳) $x + y + z + 1 = 0$ ۴) $x + y + z - 1 = 0$

۳ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که از دو نقطه‌ی $A(1,2,3)$ و $B(2,-2,1)$ گذشته و با خط ($y = 0$ و $z + 1 = \frac{x-1}{2}$) موازی است، کدام است؟

۱) $-2x + 4y - 9z = 11$ ۲) $2x + 4y - 9z = 11$ ۳) $-4x - 5y + 9z + 10 = 0$ ۴) $4x + 5y - 8z + 10 = 0$

۴ ـ صفحه‌ی $x + 2y + 2z = 6$ محورهای مختصات را در نقاط A_x، A_y و A_z قطع می‌کند. زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{A_xA_y}$ و $\overrightarrow{A_xA_z}$ چه‌قدر است؟ (آزاد ـ ۸۰)

۱) $\operatorname{Arccos}\frac{1}{5}$ ۲) $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۵ ـ معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر دو نقطه‌ی $(-1,3,2)$ و $(0,1,1)$ و موازی محور x ها کدام است؟ (سراسری ـ ۸۳)

۱) $x + z = 1$ ۲) $y + z = 2$ ۳) $-x + y = 1$ ۴) $2x - y + z = 0$

۶ ـ دو صفحه‌ی $x + y - 2z = 1$ و $x + y - 2z = 0$: (آزاد ـ ۷۲)

۱) بر هم منطبق‌اند. ۲) متقاطع‌اند و بر هم عمود نیستند.

۳) متوازی و متمایز هستند. ۴) بر هم عمودند.

۷ ـ به ازای چه مقدار m دو صفحه به معادلات $x - y + z = 0$ و $2x - y + mz = 1$ بر یکدیگر عمودند؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

۸ ـ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,1,1)$ از صفحه‌ی p به معادله‌ی $2x + 3y + z - 1 = 0$ برابر است با: (آزاد ـ ۶۶)

۱) $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ ۲) $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

۹ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که فاصله‌ی آن از صفحه‌ی $x - y + 2z = 4$ برابر با $\sqrt{6}$ است به‌صورت $-2x + 2y - 4z = d$ است. d کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درصد:	وضعیت: ◇ خوب ◇ متوسط ◇ ضعیف	شماره‌ی تست‌های نادرست و نزده: ....

آزمون سوم (استاندارد)

۲۷ دقیقه

۱ ـ صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(1,-1,1)$ و عمود بر خط $(x = t+1 , y = 2t , z = t+1)$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟ (سراسری ـ ۸۰)

۱) $(0,0,0)$ ۲) $(0,0,1)$ ۳) $(0,1,0)$ ۴) $(1,0,0)$

۲ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که از سه نقطه $A(1,0,0)$، $B(0,1,0)$ و $C(1,1,1)$ می‌گذرد کدام است؟ (سراسری ـ ۷۳)

۱) $x + y - z = 1$ ۲) $x - y + z = 1$ ۳) $2x + y - z = 2$ ۴) $2x - 2y + z = 2$

۳ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(1,0,2)$ و خط $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{1-z}{2}$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $-5x+2y-4z=13$ ۲) $5x-2y+4z=13$ ۳) $5x+2y-4z=-3$ ۴) $-5x-2y+4z=-3$

۴ ـ در یک مکعب، اگر مختصات دو رأس مقابلِ وجه کف آن $A(1,0,2)$ و $B(-1,2,2)$ بوده و معادله‌ی یکی از صفحات وجه کناری آن $x-2y+2z=3$ باشد، معادله‌ی صفحه‌ی کفِ کدام است؟

۱) $x+y+z=3$ ۲) $x+y+z=4$ ۳) $2x+2y+z=3$ ۴) $2x+2y+z=4$

۵ ـ صفحه‌ی شامل دو خط موازی $(x=2t+1, y=t-1, z=t)$ و $(\frac{x}{2}=y=z-2)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ *(سراسری ـ ۸۲)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶ ـ حجم محدود به صفحه‌ی با معادله‌ی $x+3y+4z=12$ و صفحات مختصات کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۷ ـ صفحه‌ای که از نقطه‌ی $(2,3,-2)$ گذشته و بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول در صفحه‌ی xoy عمود باشد، از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

۱) $(3,3,-3)$ ۲) $(-3,-3,0)$ ۳) $(3,-3,3)$ ۴) $(3,3,0)$

۸ ـ صفحه‌ای که شامل محور ox و خط به معادله‌ی $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ است، از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(1,2,-1)$ ۲) $(-2,-2,-1)$ ۳) $(-1,2,-1)$ ۴) $(2,1,2)$

۹ ـ صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(3,-2,0)$ و $B(2,-2,2)$ ....

۱) عمود بر محور oy است.
۲) موازی محور oy است.
۳) موازی صفحه‌ی xoz است.
۴) عمود بر صفحه‌ی xoz است.

۱۰ ـ حجم شکل حاصل از رابطه‌ی $A=\{(x,y,z) \mid |x+y|\le 1, |x-y|\le 1, |z|\le 1\}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۱ ـ رابطه‌ی $x^2+y^2-z^2+2xy+4z-4=0$ نشان‌دهنده‌ی دو صفحه‌ی .... است؟

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متعامد ۴) متقاطع

۱۲ ـ اگر صفحه‌ی به معادله‌ی $kx+y+2z=0$ بر کره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$ مماس باشد، k کدام می‌تواند باشد؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) -3 ۴) ۴

۱۳ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که شامل محور oz بوده و به فاصله‌ی $\sqrt{2}$ از نقطه‌ی $(3,3,-1)$ است، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=7x$ ۲) $y=5x$ ۳) $y=3x$ ۴) $y=x$

۱۴ ـ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی $x+y+z=1$ و $x+y+z=-1$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ۷۰)*

۱) ۲ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۱۵ ـ زاویه‌ی بین دو صفحه به معادلات $x+y-z=4$ و $2x-y-2z=8$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$

۱۶ ـ معادله‌ی صفحه‌ای که فاصله‌ی آن از صفحه‌ی $x-2y-3z=1$ سه برابر فاصله‌ی آن از صفحه‌ی $-2x+4y+6z=4$ است، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $2x-4y-6z=7$ ۲) $x-2y-3z=5$ ۳) $2x-4y-6z=-7$ ۴) $x-2y-3z=-5$

۱۷ ـ معادله‌ی صفحه‌ی نیم‌ساز دو صفحه‌ی $x+y=3$ و $2y-2z=5$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x+z=1$ ۲) $x-z=1$ ۳) $2x-2z=1$ ۴) $2x+2z=1$

درصد:	وضعیت: ◇ خوب ◇ متوسط ◇ ضعیف	شماره‌ی تست‌های نادرست و نزده: ....

پاسخ‌های بخش ۲

پاسخ آزمون یکم (ساده)

۱ ـ (۳) با توجه به نقطه‌ی A و بردار نرمال $\overrightarrow{OA}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A=(۱,-۱,۱) \\ n=\overrightarrow{OA}=(۱,-۱,۱)\end{array}\right\} \Rightarrow x-y+z=(۱)(۱)+(-۱)(-۱)+(۱)(۱)=۳$$

۲ ـ (۲) **چشم‌انداز:** دو خط موازی نیستند، بنابراین ضرب خارجی بردار هادی آن‌ها همان بردار نرمال صفحه خواهد بود.

$$u_۱=(۲,۳,۱)$$
$$u_۲=(۳,۲,۱)$$
$$\mathbf{n=(۱,۱,-۵)}$$

واضح است که تنها صفحه‌ی گزینه‌ی ۲ دارای چنین بردار نرمالی است و نیازی به ادامه‌ی محاسبه نیست.

۳ ـ (۱) در محل برخورد یک صفحه و محور xها، y و z صفر است؛ لذا بدون هیچ محاسبه‌ای واضح است که **گزینه‌ی ۱** صحیح است.

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مختصات محل برخورد صفحه و محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x,y=۰\Rightarrow z=۲\Rightarrow A(۰,۰,۲)$$
$$x,z=۰\Rightarrow y=۴\Rightarrow B(۰,۴,۰)$$
$$y,z=۰\Rightarrow x=۴\Rightarrow C(۴,۰,۰)$$

پله‌ی دوم: با تشکیل بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و ضرب خارجی آن‌ها، مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=(۰,۴,-۲)$$
$$\overrightarrow{AC}=(۴,۰,-۲)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۸,-۸,-۱۶)$$

$$S=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۱+۱+۴}\Rightarrow \mathbf{S=۴\sqrt{۶}}$$

۵ ـ (۱) واضح است که صفحه‌ی موردنظر، همان $z=\frac{۵}{۲}$ است که صفحه‌ای عمود بر محور oz و **موازی صفحه‌ی xoy** است.

۶ ـ (۳) شرط موازی بودن دو صفحه:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲m}\Rightarrow \mathbf{m=۱}$$

۷ ـ (۳)

$$D=\frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$
$$\Rightarrow D=\frac{|(۱)(۲)+(۱)(-۱)+۰-۰|}{\sqrt{۱+۱+۰}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\mathbf{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۸ ـ (۲)

$$\cos\theta=\frac{|n.n'|}{|n||n'|}=\frac{|(۱)(۰)+(۲)(۱)+(۰)(۲)|}{\sqrt{۱+۴}\sqrt{۱+۴}}=\frac{۲}{۵}$$
$$\Rightarrow\ \mathbf{\theta=Arc\cos\frac{۲}{۵}}$$

پاسخ آزمون دوم (متوسط)

۱ ـ (۱) بردار نرمال صفحه همان بردار هادی خط است، لذا داریم:

$$\Delta:\frac{x}{۱}=\frac{y}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{z}{۱}\Rightarrow u=n=\mathbf{(۱,-\frac{۱}{۲},۱)}$$

تنها در **گزینه‌ی ۱** بردار نرمال صفحه مضربی از بردار نرمال فوق است (یعنی $n=(۲,-۱,۲)$)، بنابراین نیاز به محاسبه‌ی کامل معادله‌ی صفحه با استفاده از نقطه نیست.

۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** دو خط موازی نیستند، لذا بردار نرمال صفحه، ضرب خارجی بردارهای هادی خط‌هاست.

$$u_۱=(-۱,-۱,۱)$$
$$u_۲=(-۱,-۲,۲)$$
$$n=u_۱\times u_۲=(۰,۱,۱)$$

پله‌ی دوم: بردار نرمال صفحات موجود در گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح هستند، لذا باید معادله‌ی صفحه را با استفاده از نقطه‌ای دلخواه روی یکی از خطوط به‌دست آوریم:

$A:(0,1,-2)$ «روی خط اول»

$$\Rightarrow y+z=(1)(1)+(1)(-2) \Rightarrow \mathbf{y+z+1=0}$$

۳ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** حاصل‌ضرب خارجی بردار $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی خط، بردار نرمال صفحه است (البته به شرطی که $\overrightarrow{AB}$ و u موازی نباشند).

$$\overrightarrow{AB}=(1,-4,-2)$$
$$\underline{u=(2,\ 0\ ,\ 1\ )}$$
$$n=\overrightarrow{AB}\times u=(-4,-5,8)$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی صفحه‌ی عبوری از نقطه‌ی A با بردار نرمال n :

$$-4x-5y+8z=(-4)(1)-5(2)+8(3)=10$$
$$\Rightarrow \mathbf{4x+5y-8z+10=0}$$

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** محاسبه‌ی مختصات A_x، A_y و A_z:

$$y,z=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A_x(6,0,0)$$
$$x,z=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A_y(0,3,0)$$
$$x,y=0 \Rightarrow z=3 \Rightarrow A_z(0,0,3)$$

پله‌ی دوم: تشکیل بردارهای $\overrightarrow{A_xA_y}$ و $\overrightarrow{A_xA_z}$ و محاسبه‌ی زاویه‌ی بین آن‌ها:

$$\overrightarrow{A_xA_y}=(-6,3,0) \qquad , \qquad \overrightarrow{A_xA_z}=(-6,0,3)$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{A_xA_y}.\overrightarrow{A_xA_z}}{|\overrightarrow{A_xA_y}||\overrightarrow{A_xA_z}|}=\frac{36+0+0}{\sqrt{45}\sqrt{45}}=\frac{4}{5} \Rightarrow \mathbf{\theta=Arccos\frac{4}{5}}$$

۵ ـ (۲) بردار نرمال صفحه، حاصل‌ضرب خارجی پیکان عبوری از دو نقطه‌ی $A(2,3,-1)$ و $B(0,1,1)$ و بردار هادی محور ox، یعنی i است. بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)\approx(1,1,-1) \qquad , \qquad u=i=(1,0,0)$$
$$n=\overrightarrow{AB}\times u=(0,-1,-1)$$

تنها در **گزینه‌ی ۲**، مضرب «۱−» از این بردار وجود دارد، بنابراین گزینه‌ی صحیح است.

۶ ـ (۳) بدیهی است بین این دو صفحه رابطه‌ی «$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$» برقرار است، بنابراین دو صفحه **موازی و متمایزند**.

۷ ـ (۱) شرط عمود بودن دو صفحه: $n_1 \perp n_2 \Rightarrow n_1.n_2=0$

$$\Rightarrow (1,-1,1).(2,-1,m)=0 \Rightarrow 2+1+m=0 \Rightarrow \mathbf{m=-3}$$

۸ ـ (۱) فاصله‌ی نقطه از صفحه:

$$D=\frac{|2(1)+3(1)+(1)(1)-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$\Rightarrow D=\frac{5}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{14}$$

۹ ـ (۴) **چشم‌انداز:** با توجه به نکته‌ی ۷، فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی را مساوی $\sqrt{6}$ قرارداده و مقدار d را محاسبه می‌کنیم.

با ضرب معادله‌ی صفحه‌ی اول در عدد «۲−»، ضرایب متغیرهای دو صفحه یکسان می‌شوند:

$$\begin{cases}R':-2x+2y-4z=-8\\ R:-2x+2y-4z=d\end{cases} \Rightarrow \frac{|d-(-8)|}{\sqrt{4+4+16}}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |d+8|=(2\sqrt{6})(\sqrt{6})=12 \Rightarrow \begin{cases}d+8=12 \Rightarrow d=4\\ d+8=-12 \Rightarrow d=-20\end{cases}$$

هر دو مقدار قابل قبول است که **d = ۴** در گزینه‌ی ۴ موجود است.

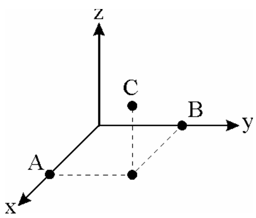
پاسخ آزمون سوم (استاندارد)

۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** بردار نرمال صفحه همان بردار هادی خط است:

$$n=u=(1,2,1)$$
$$\Rightarrow \text{«معادله‌ی صفحه»}: x+2y+z=(1)(1)+(2)(-1)+(1)(1)=0$$

پله‌ی دوم: مختصات نقاط گزینه‌ها را در معادله‌ی صفحه آزمایش می‌کنیم که تنها **گزینه‌ی ۱** صحیح است.

۲ ـ (۱) **چشم‌نداز:** راستش در صورت این تست شکلی بود که ما متوجه نشدیم که چه کمکی به حل مسئله می‌کند (شکل زیر). اما به هر حال لازم است با تشکیل پیکان‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و ضرب خارجی آن‌ها، بردار نرمال صفحه را محاسبه کنیم:



$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$$
$$\underline{\overrightarrow{AC}=(0\ ,1,1)}$$
$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,-1)$$

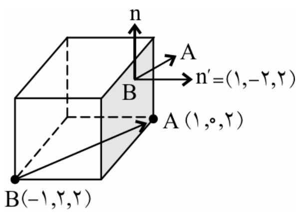
واضح است که تنها **گزینه‌ی ۱** می‌تواند صحیح باشد.

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** اگر نقطه‌ای دل‌خواه مانند B روی خط انتخاب کرده و با نقطه‌ی A یک پیکان بسازیم، ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی خط، بردار نرمال صفحه خواهد بود:

$$B=(1,-2,1)$$
$$\overrightarrow{AB}=(0,-2,-1)$$
$$\underline{u=(-2,\ 1\ ,-2)}$$
$$n=\overrightarrow{AB}\times u=(5,2,-4)$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی صفحه: $5x+2y-4z=5(1)+2(0)-4(2)=-3$

۴ ـ (۴) **چشم‌انداز:** چنان‌چه در شکل مشاهده می‌کنید، اگر $n'=(1,-2,2)$ را بردار نرمال صفحه‌ی وجه در نظر گرفته و پیکان $\overrightarrow{BA}$ را در نظر بگیریم، ضرب خارجی آن‌ها، بردار نرمال صفحه‌ی کف (یعنی n) خواهد بود.



پله‌ی یکم:

$\overrightarrow{BA}=(2,-2,0)$

$\underline{n'=(1,-2,2)}$

$n=\overrightarrow{BA}\times n'=(-4,-4,-2)\approx(2,2,1)$

پله‌ی دوم: معادله‌ی صفحه: $2x+2y+z=2(1)+2(0)+(1)(2)=4$

۵ ـ (۴) **چشم‌انداز:** با استفاده از یک نقطه‌ی دلخواه روی هر خط، پیکانی را تشکیل داده و ضرب خارجی آن را در یکی از بردارهای هادی محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب بردار نرمال صفحه حاصل خواهد شد.

پله‌ی یکم: $t=0\Rightarrow A(1,-1,0)$: «نقطه‌ی A روی خط اول»

$x=0\Rightarrow B(0,0,2)$: «نقطه‌ی B روی خط دوم»

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$

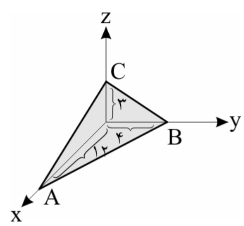
$\underline{u=(2,1,1)}$

$n=\overrightarrow{AB}\times u=(-1,5,-3)$

$-x+5y-3z=-6$: «معادله‌ی صفحه»

پله‌ی دوم: تقاطع با محور x ها: $y,z=0\Rightarrow \mathbf{x=6}$

۶ ـ (۱) **چشم‌انداز:** با توجه به شکل، واضح است که حجم محدود، یک هرم مثلث‌القاعده‌ی قائم است. برای محاسبه‌ی حجم آن، لازم است مساحت قاعده‌ی AOB را در ارتفاع آن، یعنی OC ضرب کنیم. بنابراین نیاز به محاسبه‌ی طول و عرض و ارتفاع نقاط برخورد صفحه با محورهای ox، oy و oz داریم.



پله‌ی یکم:

$y,z=0\Rightarrow x=12\Rightarrow |OA|=12$

$x,z=0\Rightarrow y=4\Rightarrow |OB|=4$

$x,y=0\Rightarrow z=3\Rightarrow |OC|=3$

پله‌ی دوم:

$V=\frac{1}{3}$ (مساحت قاعده) (ارتفاع) $\Rightarrow V=(\frac{1}{3})[\frac{1}{2}(4)(12)](3)=\mathbf{24}$

۷ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** می‌دانیم بردار هادی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول در صفحه‌ی xoy عبارت است از: $u=(1,1,0)$

بنابراین معادله‌ی صفحه عبارت است از: $x+y=2-2=0$

پله‌ی دوم: تنها مختصات نقطه‌ی **گزینه‌ی ۳** در معادله‌ی این صفحه صدق می‌کند.

۸ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** بردار نرمال صفحه، ضرب خارجی بردار هادی محور xها، (یعنی i) و بردار هادی خط است.

$i=(1,0,0)$

$\underline{u=(2,2,-1)}$

$n=i\times u=(0,1,2)$

پله‌ی دوم: نقطه‌ای دلخواه روی خط در نظر گرفته و معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم: $A(0,2,-1)\Rightarrow y+2z=(1)(2)+(2)(-1)=0$

پله‌ی سوم: تنها مختصات **گزینه‌ی ۱** در معادله‌ی این صفحه صدق می‌کند.

۹ ـ (۲) کافی است بردار نرمال صفحه را که همان $\overrightarrow{AB}$ است، محاسبه کنیم: $n=\overrightarrow{AB}=(-1,0,2)$

از آن‌جا که مؤلفه‌ی دوم بردار نرمال این صفحه صفر است، صفحه **موازی محور oy** است.

۱۰ ـ (۳) **چشم‌انداز:** آن‌چه در این تست مشخص است، این است که محدوده‌های $-1\le z\le 1$ و $-1\le x-y\le 1$ و $-1\le x+y\le 1$ را می‌توان با صفحات دوبه‌دو موازیِ «$z=1$، $z=-1$» و «$x-y=1$، $x-y=-1$» و «$x+y=1$، $x+y=-1$» نمایش داد.

پله‌ی اول: در این حالت هر جفت صفحه نسبت به دو جفت صفحه‌ی دیگر عمود است، زیرا بردارهای نرمال هر جفت عبارتند از:

$n_1=(0,0,1)\ ,\ n_2=(1,-1,0)\ ,\ n_3=(1,1,0)$

$\Rightarrow n_1.n_2=0\ ,\ n_2.n_3=0\ ,\ n_1.n_3=0$

بنابراین، این شش وجهی یک مکعب مستطیل خواهد بود.

پله‌ی دوم: فاصله‌ی هر دو وجه موازی مکعب مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$2=\frac{|1-(-1)|}{1}=$ «فاصله‌ی $z=1$ و $z=-1$»

$\sqrt{2}=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{1+1}}=$ «فاصله‌ی $x-y=1$ و $x-y=-1$»

$\sqrt{2}=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{1+1}}=$ «فاصله‌ی $x+y=1$ و $x+y=-1$»

پله‌ی سوم: $V=(2)(\sqrt{2})(\sqrt{2})=4$

۱۱ ـ (۴) **چشم‌انداز:** با توجه به گزینه‌ها و آن‌چه در نکته‌ی ۴ پلکان آموزش مشاهده کردید، لازم است با تجزیه‌ی عبارت جبری، آن را به حاصل‌ضرب دو عبارت دیگر تبدیل کنیم.

برای این منظور با دسته‌بندی مناسب داریم:

$$x^2+y^2+2xy-(z^2-4z+4)=0 \Rightarrow (x+y)^2-(z-2)^2=0$$

$$\Rightarrow (x+y+z-2)(x+y-z+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

نتیجه: واضح که این‌ها، **دو صفحه‌ی** غیرموازی و **متقاطع** هستند.

۱۲ ـ (۲) **چشم‌انداز**: می‌دانیم فاصله‌ی مرکز کره از صفحه‌ی مماس بر ان، برابر با شعاع کره است. بنابراین باید مختصات مرکز و شعاع کره را محاسبه کرده و فاصله‌ی مرکز از صفحه را مساوی شعاع قرار دهیم.

پله‌ی یکم: می‌دانیم معادله‌ی کره عبارت است از:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

بنابراین با دسته‌بندی مناسب داریم:

$$x^2+\underbrace{y^2-2y+1}+\underbrace{z^2+4z+4}=-4+1+4$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1 \Rightarrow O(0,1,-2) \ , \ R=1$$

پله‌ی دوم:

$$OH=R \Rightarrow \frac{|k(0)+(1)+2(-2)|}{\sqrt{k^2+1+4}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{k^2+5}}=1 \Rightarrow k^2+5=9 \Rightarrow k^2=4 \Rightarrow \mathbf{k=\pm 2}$$

۱۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم**: چنانچه دانستیم معادله‌ی صفحه‌ی شامل محور oz به‌صورت $x+my=0$ است.

پله‌ی دوم: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,-3,3)$ از این صفحه را مساوی $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$$AH=\frac{|1+m(-3)|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow |1-3m|=(\sqrt{2})\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow (1-3m)^2=2(1+m^2) \Rightarrow 9m^2-6m+1=2m^2+2$$

$$\Rightarrow 7m^2-6m-1=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{1}{7} \end{cases}$$

نتیجه: با توجه به مقادیر m داریم:

$$m=1 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x$$

$$m=-\frac{1}{7} \Rightarrow x-\frac{1}{7}y=0 \Rightarrow \mathbf{y=7x}$$

۱۴ ـ (۴) فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی:

$$D=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow D=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

۱۵ ـ (۳) داریم: $n=(1,1,-1) \ , \ n'=(2,-1,-2)$

$$\cos\theta=\frac{|n.n'|}{|n||n'|}=\frac{|2-1+2|}{(\sqrt{4+1+4})(\sqrt{1+1+1})}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\theta=Arccos\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

۱۶ ـ (۳) **چشم‌انداز**: مشخص است دو صفحه‌ی مفروض (که آن‌ها را R' و R'' می‌نامیم) موازی هستند و درنتیجه صفحه‌ی سوم (R) نیز با هر دوی آن‌ها موازی خواهد بود. بنابراین کافی است پس از یکسان کردن ضرایب متغیرهای دو صفحه‌ی R' و R'' ، ضرایب متغیرهای صفحه‌ی R را نیز مساوی آن‌ها در نظر گرفته و تنها مقدار ثابت d را در آن محاسبه کنیم.

پله‌ی یکم: با ضرب معادله‌ی صفحه‌ی R' در «۲−» داریم:

$$\begin{cases} R':-2x+4y+6z=-2 \\ R'':-2x+4y+6z=4 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: برای محاسبه‌ی d در صفحه‌ی $R:-2x+4y+6z=d$ فاصله‌ی R را از R' ، ۳ برابر فاصله‌ی آن از R'' قرار می‌دهیم:

$$\frac{|d+2|}{\sqrt{4+16+36}}=\frac{3|d-4|}{\sqrt{4+16+36}} \Rightarrow \begin{cases} d+2=3(d-4) \Rightarrow d=7 \\ d+2=-3(d-4) \Rightarrow d=\frac{5}{2} \end{cases}$$

پله‌ی سوم: معادله‌ی دو صفحه‌ی محاسبه شده با توجه به گزینه‌ها عبارتند از:

$$d=7 \Rightarrow -2x+4y+6z=7 \Rightarrow \mathbf{2x-4y-6z=-7}$$

$$d=\frac{5}{2} \Rightarrow -2x+4y+6z=\frac{5}{2} \Rightarrow x-2y-3z=-\frac{5}{4}$$

نتیجه: **گزینه‌ی ۳** صحیح است.

۱۷ ـ (۴) **چشم‌انداز**: فاصله‌ی نقاط $M(x,y,z)$ روی صفحه‌ی نیم‌ساز از دو صفحه را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\frac{|x+y-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|2y-2z-5|}{\sqrt{4+4}} \Rightarrow \sqrt{8}|x+y-3|=\sqrt{2}|2y-2z-5|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x+y-3)=2y-2z-5 \Rightarrow 2x+2z=1 \\ 2(x+y-3)=-(2y-2z-5) \Rightarrow 2x+4y-2z=11 \end{cases}$$

نتیجه: **گزینه‌ی ۴** نشان‌دهنده‌ی یکی از نیم‌سازهای محاسبه شده است.